Physique

Chapitre 4

Relation Fondamentale de la Dynamique

Dr. Benoît CHABAUD

Objectifs

- Comprendre la :
  - Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD)
- Définir les conditions d'application de la RFD et notamment la notion de :
  - Référentiel Galiléen
- Appliquer la RFD à quelques exemples :
  - Systèmes libres
  - Systèmes quelconques

1.1. Relation Fondamentale de la Dynamique

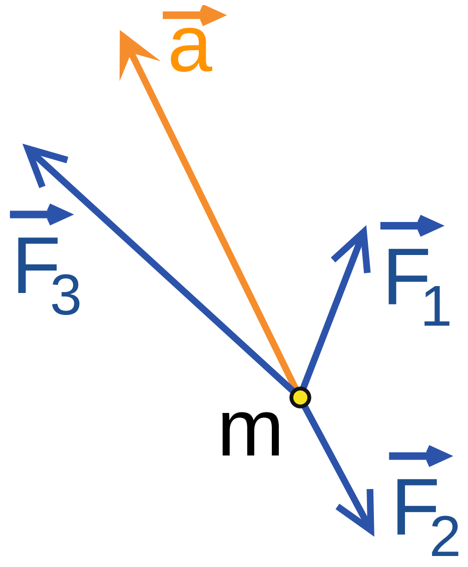
- La Relation Fondamentale de la Dynamique (‘RFD’), appelée aussi 2nde Loi de Newton (établie en 1687) fait le lien entre la cinématique d’un système (position, vitesse, accélération) et les forces qui lui sont appliquées.

- Cette relation s’écrit : $\boxed{\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\,\vec{a}}$ [!]

  - où $\vec{a}$ est l’accélération du système,
  - m est sa masse (supposée constante), et
  - $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ est la somme des Forces extérieures appliquées au système.

- Remarques :
- Il s'agit d'une égalité vectorielle.
- Cette expression de la RFD s'applique aux mouvements de translation.
- (Pour des mouvements de rotation, la RFD fait intervenir le moment des forces, la vitesse angulaire du système et son moment d'inertie. Mais on n'en parlera pas dans ce cours).

- Autrement dit, on se limitera à l'étude de systèmes ponctuels, dont le point correspond au centre de masse :
  - Ce point concentre toute la masse du système,
  - Et on considère que les forces s'appliquent au centre de masse.

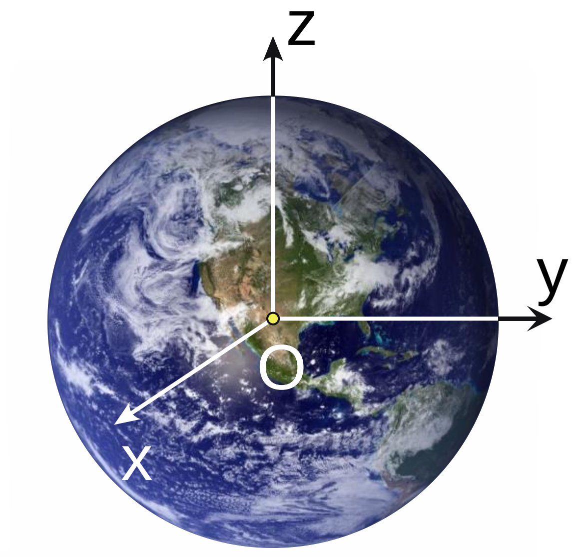


- Domaine d'application :
- La RFD est applicable uniquement dans un référentiel « Galiléen ».

  Dans un tel référentiel, on peut appliquer le 'principe d'inertie' : un système libre (ne subissant aucune force extérieure) est soit au repos, soit possède une vitesse constante (translation rectiligne uniforme).

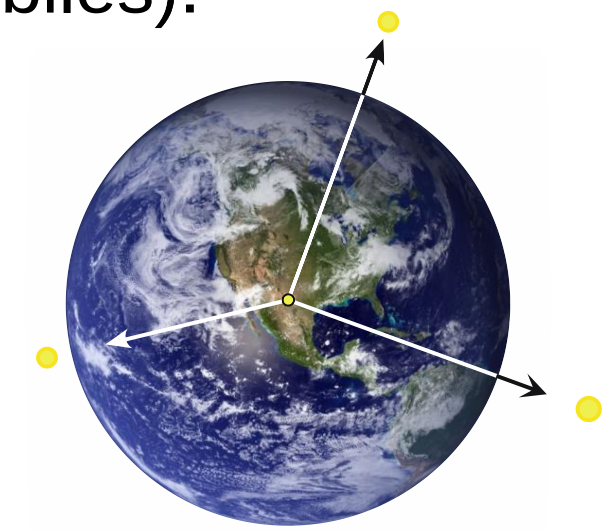
- Les référentiels les plus courants sont :
- Le référentiel terrestre : origine en un point de la Terre, avec des axes attachés à la Terre.

  ☞ Non Galiléen : la Terre autour de son axe.



- Ce référentiel peut cependant être approximé comme Galiléen pour des expériences courtes (≪ 24h). Dans la suite, on utilisera le référentiel terrestre pour illustrer la RFD.

- Le référentiel géocentrique : origine au centre de la Terre, avec des axes pointant vers trois étoiles lointaines (immobiles).
  - ☞ Non Galiléen : la Terre tourne autour du soleil



- Peut être considéré comme Galiléen pour des expériences pas trop longues (≪ 1 an).
  Exemple : mouvements des satellites artificiels.

- Le référentiel de Copernic : origine au centre de masse du système solaire avec des axes pointant vers trois étoiles éloignées
  - ☞ Non Galiléen : le système solaire se déplace dans la Galaxie...
- Peut être considéré comme Galiléen pour des expériences d'une durée ≪ quelques millions d'années. Exemple : étude du système solaire.

1.2. Systèmes libres

- Un ‘système libre’ est un système qui n’est soumis à aucune force, ou qui est soumis à des forces dont la résultante est nulle.
- On a vu qu’on peut appliquer le ‘principe d’inertie’ à un tel système : la RFD nous dit que son accélération $\vec{a} = \vec{0}$. La vitesse du système $\vec{v}$ est donc constante (ou nulle).
- Les exemples qui suivent prennent place dans le référentiel Terrestre (ou référentiel du Laboratoire, lié par exemple à la pièce dans laquelle on réalise l’expérience).
- Ce référentiel n’est pas Galiléen, mais les expériences décrites ici sont suffisamment courtes pour que l’on puisse appliquer le principe d’inertie.

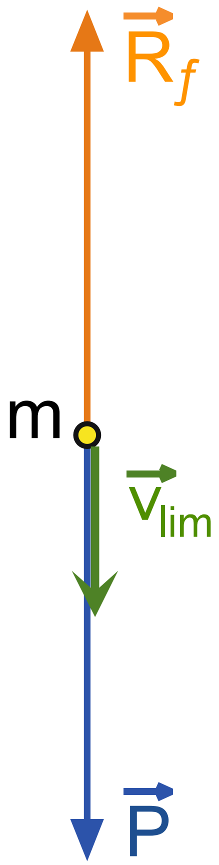
1. Régime permanent d'une chute libre

- On considère un système qui tombe librement dans l'atmosphère sous l'effet de la pesanteur.
- Au début du mouvement, la vitesse augmente, jusqu'à ce que la résistance de l'air compense le poids du système.
- A ce moment là, on a deux forces qui s'annulent : le poids $\vec{P}$ et la résistance de l'air $\vec{R_f}$ (opposée au mouvement) :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R_f} = \vec{0}$$

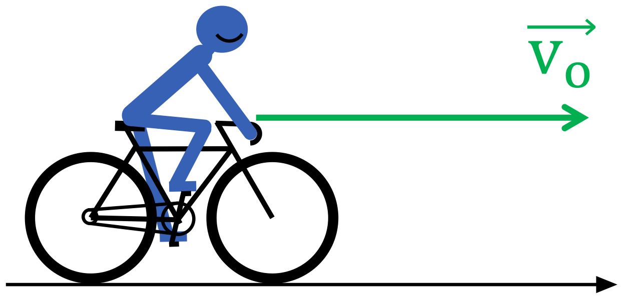
$\Rightarrow$ l'accélération $\vec{a} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ la vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{v_{lim}}$ est constante.



- Cette vitesse limite dépend de l'aérodynamisme de l'objet.
- On reprendra l'exemple de la chute libre plus en détail dans un Chapitre ultérieur.

2. Cycliste à vitesse constante



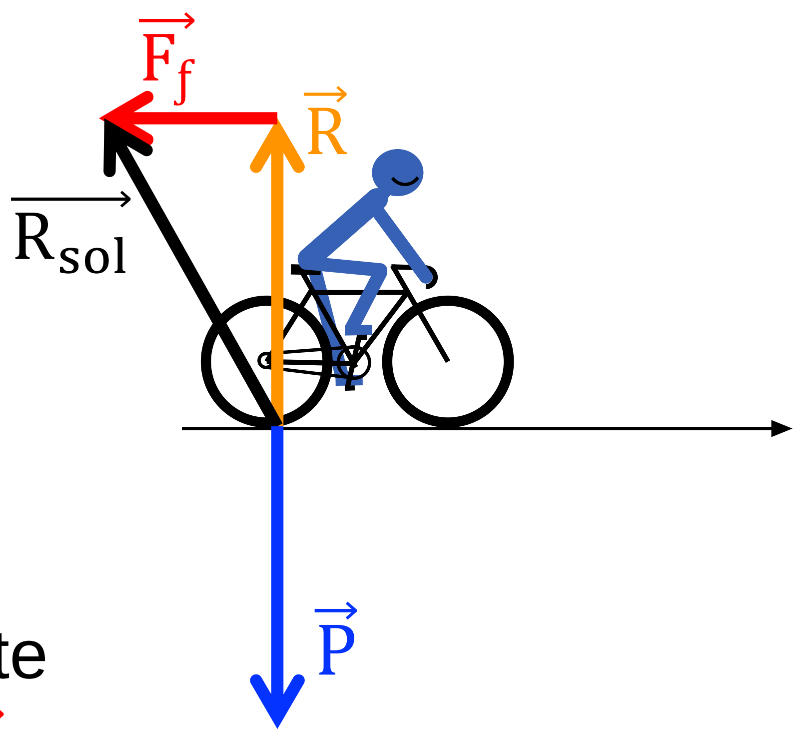
- Un cycliste roule sur une route horizontale et rectiligne.
- On veut déterminer la force que le cycliste doit fournir pour avancer avec une vitesse constante (notée $\overrightarrow{v_o}$).
- Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse, l'accélération doit être nulle :

$$\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{v_o}}{dt} = \vec{0}$$

- Si $\vec{a} = \vec{0}$, la RFD nous indique que la somme des forces appliquées doit être nulle.
- Effectuons le bilan des forces appliquées :

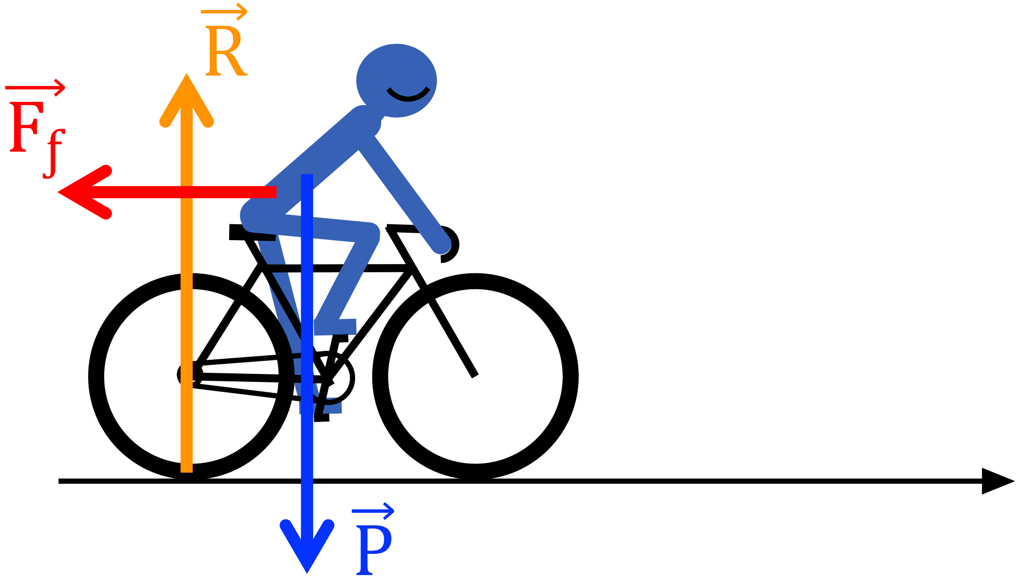
- Le système est soumis à son poids : $\overrightarrow{P}$
- Il subit aussi une force de réaction du sol : $\overrightarrow{R_{sol}}$ qui peut se décomposer en 2 composantes :

- Une composante $\overrightarrow{R}$ perpendiculaire au sol, qui compense le poids : $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}$
- Et une composante parallèle au sol, qui représente les forces de frottement de la route sur le vélo : $\overrightarrow{F_f}$



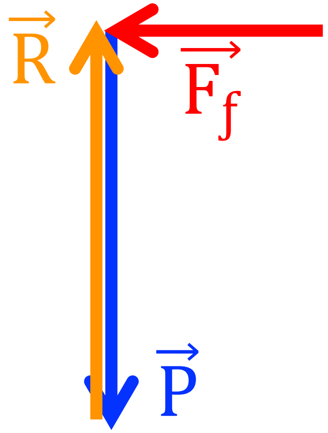
- Il existe d'autres forces de frottements (avec l'air, dans les roulements du vélo…) mais toutes ces forces sont dans la même direction (opposée au mouvement) et on suppose que la force $\overrightarrow{F_f}$ regroupe toutes ces contributions.

- Le schéma des forces est donc le suivant :



- On suppose que toutes ces forces s'appliquent au même point d'application (au centre de masse du système).

- À ce stade, le schéma des forces peut alors être représenté par le schéma ci-contre :

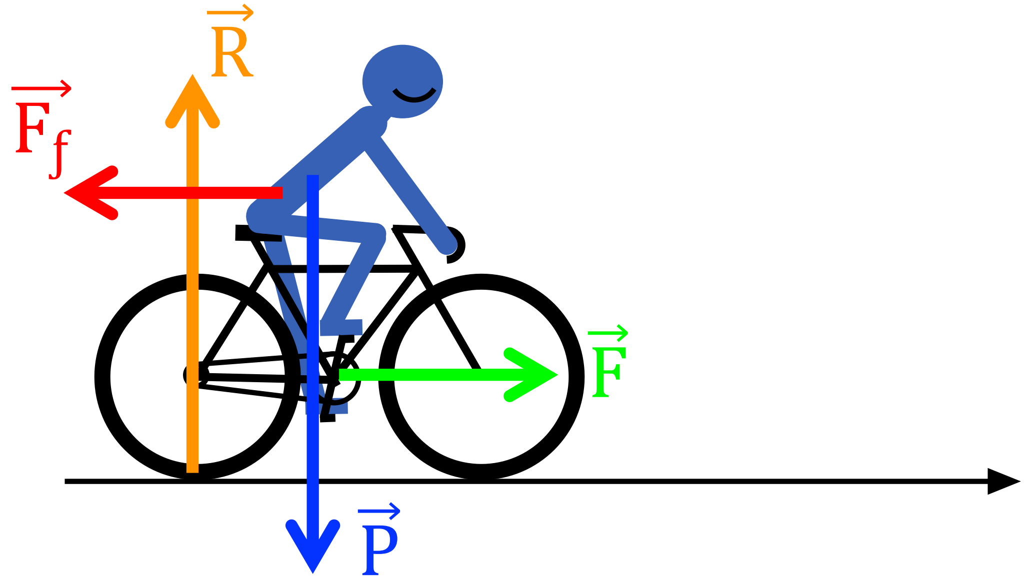


  Mais la somme des forces n'est pas (encore) nulle :

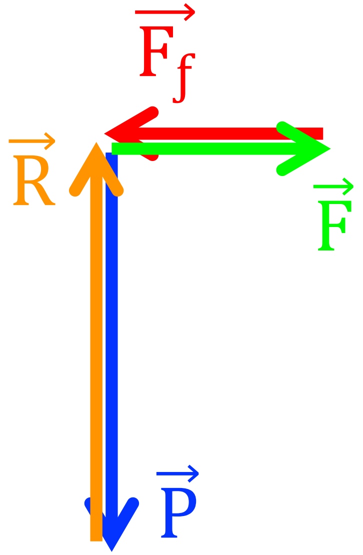
$$\overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_f}$$

- Il faut prendre en compte la force motrice du cycliste : $\overrightarrow{F}$, telle que la somme des 4 forces soit nulle : $\overrightarrow{F_f} + \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$

- La force $\vec{F}$ exercée par le cycliste est donc égale à :
$\vec{F} = -(\vec{F_f} + \vec{P} + \vec{R}) = -\vec{F_f}$.



$\Leftrightarrow$

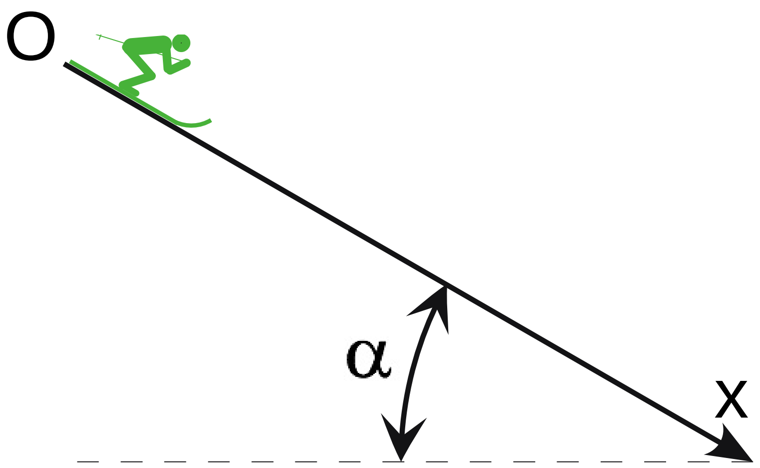


- En conclusion, pour avancer avec une vitesse constante, il faut que la force motrice du cycliste compense exactement les forces de frottements.

1.3. RFD pour un système quelconque

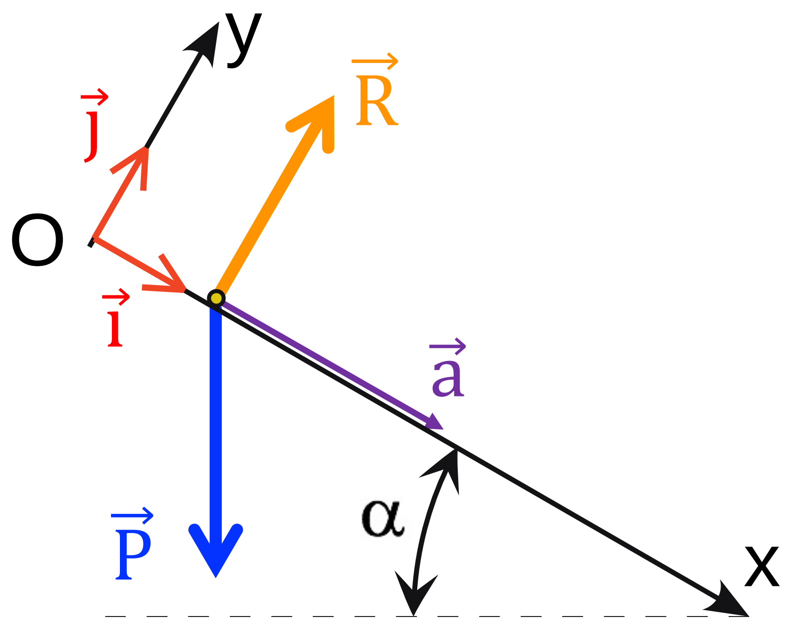
1. Skieur

- On considère un skieur de masse m, arrêté en haut d'une piste de pente α. Au temps t = 0, le skieur se laisse descendre. Déterminer les caractéristiques du mouvement (on néglige les frottements).
- Le système est le skieur, supposé ponctuel, que l'on repère par son abscisse x (le repère (Ox) lié à la Terre est supposé Galiléen).
- Les forces qui s'exercent sur le système sont : son poids $\vec{P}$ et la résistance du sol $\vec{R}$.
- Cette résistance $\vec{R}$ est perpendiculaire au sol, puisque l'on néglige les frottements.



- On projette ces 2 forces sur les axes Ox et Oy :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\sin(\alpha)\,\vec{i} - mg\cos(\alpha)\,\vec{j} & \text{(où } g = \|\vec{g}\|\text{)} \\ \vec{R} = 0\,\vec{i} + R\,\vec{j} & \text{(où } R = \|\vec{R}\|\text{)} \end{cases}$$



- On écrit ensuite les composantes de l'accélération sur les axes : $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$

- Puis on applique la RFD sur les 2 axes :

$$\begin{cases} (mg\sin(\alpha) + 0)\,\vec{i} = m\,a_x\,\vec{i} \\ (R - mg\cos(\alpha))\,\vec{j} = m\,a_y\,\vec{j} \end{cases}$$

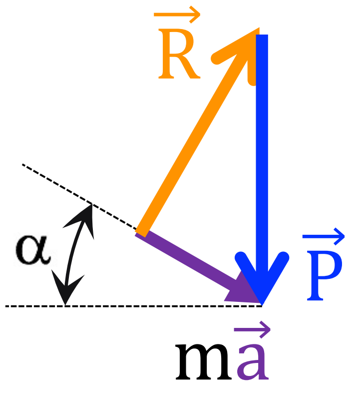
- Physiquement, l'accélération doit suivre la pente (le skieur ne va ni s'envoler, ni s'enfoncer dans la piste...) : donc a_y = 0 et il reste :

$$\begin{cases} mg\sin(\alpha) = ma_x \\ R - mg\cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- Et finalement :

$$\begin{cases} a_x = g\sin(\alpha) & (\text{et } a_y = 0) \\ R = mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

- On peut représenter le schéma des forces ainsi :



- L'accélération permet ensuite de déterminer la vitesse par intégration :

$$\begin{cases} a_x = g\sin(\alpha) \\ a_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = [g\sin(\alpha)]\,t + v_{ox} \\ v_y = v_{oy} \end{cases}$$

- Où v_{ox} et v_{oy} sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales :
- On a supposé que la vitesse du skieur est nulle à t = 0, on a donc :

$$\vec{v}(t=0) = v_x(t=0)\,\vec{i} + v_y(t=0)\,\vec{j} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} = \vec{0}$$

- D'où l'on déduit : $\begin{cases} v_{ox} = 0 \\ v_{oy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = [g\sin(\alpha)]\,t \\ v_y(t) = 0 \end{cases}$
- On voit que le mouvement est linéairement accéléré suivant l'axe Ox.

- Enfin, la vitesse permet de déterminer la position par intégration :

$$\begin{cases} v_x = [g\sin(\alpha)]\, t \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}[g\sin(\alpha)]\, t^2 + x_o \\ y = y_o \end{cases}$$

- où x_o et y_o sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales : en choisissant l'origine du repère (Oxy) là où se trouve le skieur à t = 0, on obtient $x_o = 0$ et $y_o = 0$, et donc :

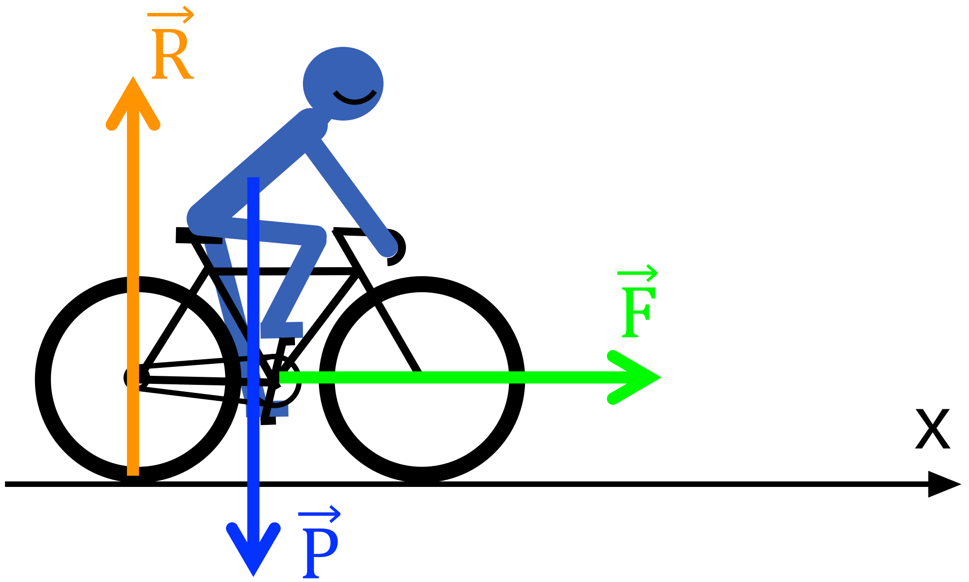
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}[g\sin(\alpha)]\, t^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

- La trajectoire est confondue avec l'axe Ox et la position en fonction du temps x(t) est entièrement définie.
- Remarquons que l'équation du mouvement ne dépend pas de la masse du système. On retrouvera cette particularité pour un mouvement de chute libre dans un prochain Chapitre.

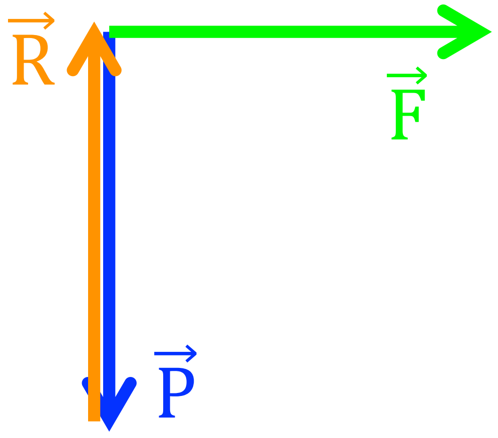
2. Cycliste en accélération

- On reprend l'exemple du cycliste sur une route horizontale et rectiligne, mais on suppose maintenant qu'il suit un mouvement uniformément accéléré : $\vec{a} = a_x \, \vec{\imath}$ (où a_x est constant).
- On veut déterminer la force que le cycliste doit fournir pour avoir une accélération constante (cette fois, on néglige les frottements).
- Bilan des forces appliquées :

- Le système est soumis à son poids : $\vec{P}$
- Comme on néglige les frottements, la réaction du sol $\vec{R}$ est perpendiculaire au sol et compense le poids : $\vec{R} = -\vec{P}$



- Le schéma des forces est donc le suivant :



- La RFD s'écrit : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\,\vec{a}$
  soit $\vec{F} = m\,\vec{a}$
- Pour que l'accélération soit constante, la force motrice doit être constante et égale à $F = \|\vec{F}\| = m\,\|\vec{a}\|$
- Application Numérique : on suppose qu'un cycliste de masse m = 70 kg accélère de v = 0 à v = 10 m/s en un temps T = 5 s.
- Son accélération (supposée constante) s'écrit donc :

$$\|\vec{a}\| = \frac{v(T) - v(0)}{T} = \frac{(10-0)\ \mathrm{m/s}}{5\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

- La force motrice correspondante est : $F = 70\ \mathrm{kg} \times 2\ \mathrm{m/s^2} = 140\ \mathrm{N}$

- Remarque : l'hypothèse consistant à négliger les frottements, conduit à une situation peu réaliste. En effet, si le cycliste arrête de pédaler ($F = 0$), la RFD implique que : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

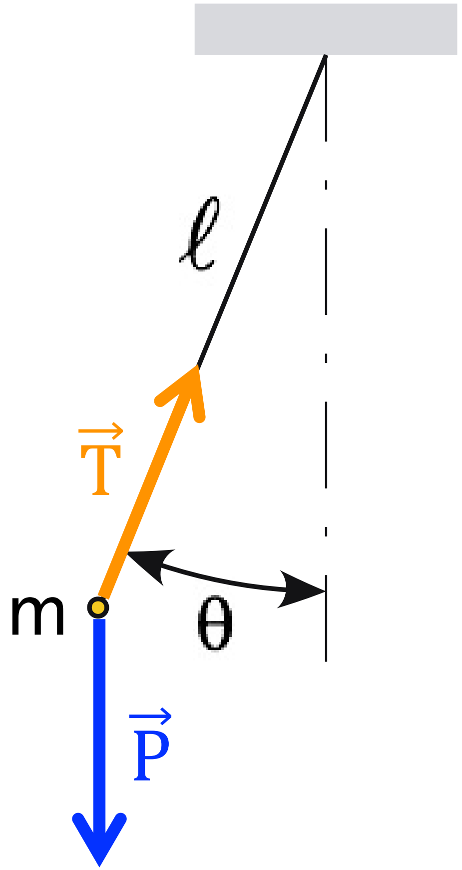
  c'est à dire $\vec{a} = \vec{0}$, c'est à dire que la vitesse $v = ||\vec{v}||$ est constante !
- Ceci est contraire à l'expérience que nous avons : en se mettant en 'roue libre' en vélo sur une route horizontale (ou au point mort en voiture), la vitesse ne reste pas constante, mais diminue jusqu'à l'arrêt.
- D'un point de vue énergétique, les forces de frottements travaillent et dégradent l'énergie cinétique en chaleur.
- En Physique, l'hypothèse consistant à négliger les frottements reste toujours une approximation.

3. Pendule

- Ce dernier exemple d'application de la RFD nécessite une résolution mathématique un peu plus compliquée.

- Le pendule est constitué d'une masse ponctuelle m, suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable.

- On lâche le pendule sans vitesse initiale à partir de l'angle $\theta = \theta_o$ et on néglige les frottements.
- L'angle θ va dépendre du temps et on notera $\theta(t)$.

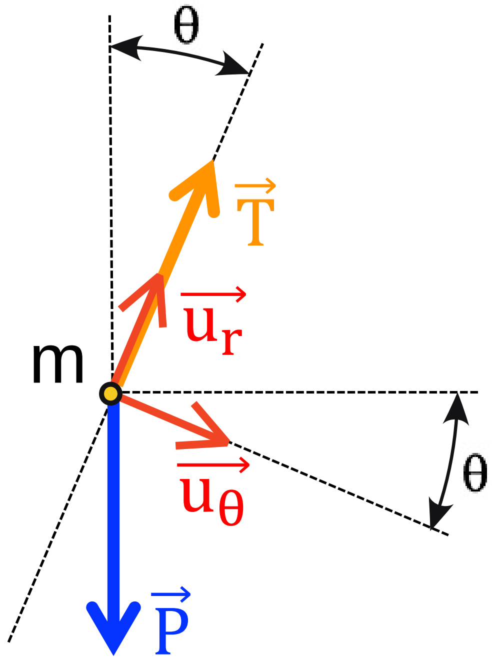


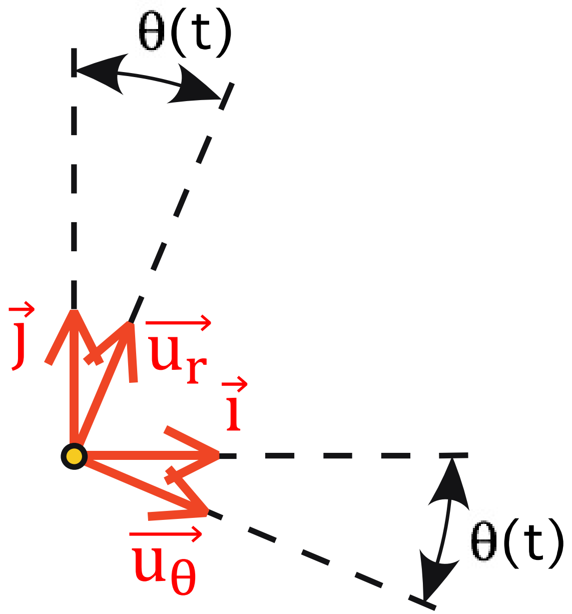
- On écrit d'abord le bilan des forces appliquées :
  - Le système est soumis à son poids : $\vec{P}$
  - Et à la tension du fil : $\vec{T}$ (dans le sens du fil).

- On va projeter les forces sur un repère de ‘Frenet’ ($\vec{u_\theta}$ $\vec{u_r}$) qui est attaché à la masse m :

  $\vec{u_\theta}$: vecteur unitaire tangentiel, dans la direction du mouvement,

  $\vec{u_r}$: vecteur unitaire radial dans la direction du fil.





- Ces deux vecteurs $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_r}$ vont donc tourner avec le pendule (avec θ(t)), et leur orientation dépend du temps.

- On va avoir besoin de leurs dérivées. Pour cela, on projette $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_r}$ sur deux vecteurs fixes $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

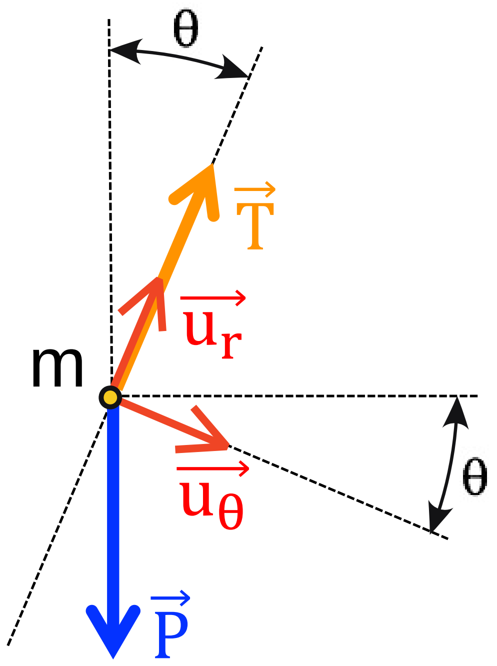
$$\begin{cases} \vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u_r} = \sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

- La dérivée des vecteurs $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_r}$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\ \vec{i} + \dfrac{d(-\sin\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\ \vec{j} = \dot{\theta}[-\sin\theta\ \vec{i} - \cos\theta\ \vec{j}] = -\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_r} \\ \dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dfrac{d(\sin\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\ \vec{i} + \dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}\ \vec{j} = \dot{\theta}[\cos\theta\ \vec{i} - \sin\theta\ \vec{j}] = \dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

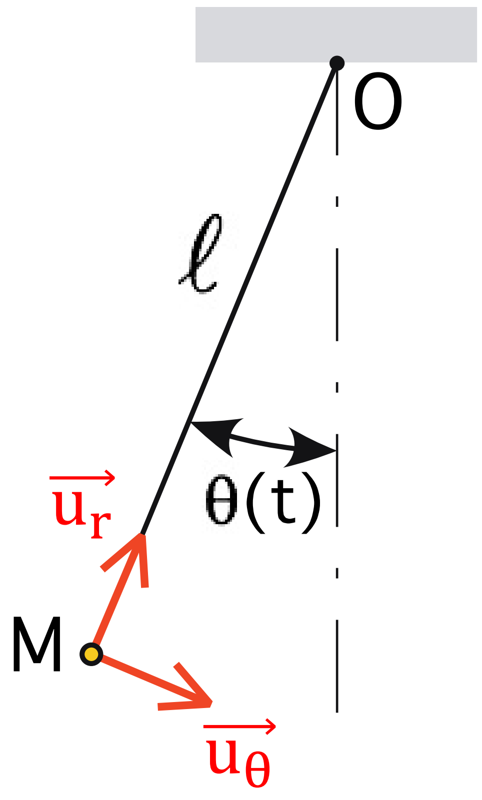
- Où $\dot{\theta} = {}^{d\theta}/_{dt}$ est la dérivée temporelle de l'angle θ(t).
- Projetons les forces sur les axes ($\overrightarrow{u_\theta}\ \overrightarrow{u_r}$) :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg\sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta} - mg\cos\theta\ \overrightarrow{u_r} \\ \vec{T} = 0\ \overrightarrow{u_\theta} + T\ \overrightarrow{u_r} = T\ \overrightarrow{u_r} \end{cases}$$



- On va maintenant exprimer l'accélération du pendule en fonction de l'angle θ(t).

- La position du pendule peut s’écrire $\overrightarrow{OM}$ où O est le point d’attache du fil. On exprime : $\overrightarrow{OM} = -\ell\,\overrightarrow{u_r}$



- La vitesse s’écrit donc : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\ell\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -\ell\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$
- Et l’accélération s’écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(-\ell\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta})}{dt} = -\ell\left[\frac{d(\dot{\theta})}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\theta}\,\frac{d(\overrightarrow{u_\theta})}{dt}\right]$$

Soit : $\vec{a} = -\ell\left[\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r})\right] = -\ell\left[\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - \dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}\right]$

- On peut finalement exprimer la RFD : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ projetée sur les axes $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_r}$:

$$\begin{cases} mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta} = m[-\ell\,\ddot{\theta}]\,\overrightarrow{u_\theta} \\ (-mg\cos\theta + T)\,\overrightarrow{u_r} = m[\ell\,\dot{\theta}^2]\,\overrightarrow{u_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell\,\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 & [1] \\ T = m\ell\,\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta & [2] \end{cases}$$

- L'équation [2] permet d'exprimer la tension du fil : $T = \|\vec{T}\|$ en fonction de l'angle θ(t) et de sa dérivée.
- L'équation [1] est plus intéressante : c'est une équation différentielle qui permet de déterminer la dépendance temporelle de l'angle θ(t). Sous sa forme : $\ell\,\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$, cette équation n'a pas de solution analytique.
- Mais si l'angle θ(t) reste petit, on peut approximer $\sin\theta \approx \theta$ (avec θ exprimé en radians) et l'équation devient : $\ell\,\ddot{\theta} + g\,\theta = 0$.
- Cette équation peut être résolue analytiquement (comme on le verra dans un prochain Chapitre), et la position du pendule θ(t) est alors déterminée à tout instant t.

Conclusion

- Dans ce Chapitre, on a vu la
  - Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD)
- Et on a étudié quelques exemples d'application sur des :
  - Systèmes libres
  - Systèmes quelconques
- Dans le Chapitre suivant, on va étudier un mouvement complet de chute libre, sous ses aspects :
  - Cinématique
  - Énergétique

Mentions légales