Physique

Chapitre 5

Mouvement de chute libre

Dr. Benoît CHABAUD

Objectifs

- Illustrer les notions vues dans les chapitres précédents en étudiant quelques systèmes en chute libre :
  - Définition des systèmes :
    conditions initiales et forces appliquées
  - Chute verticale sans frottements
  - Chute quelconque
  - Chute verticale avec frottements
  - Aspects énergétiques

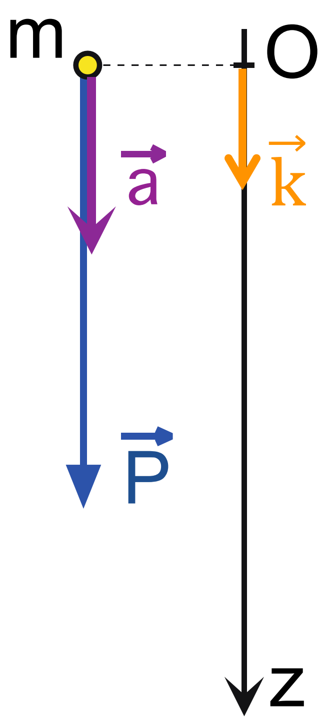
1.1. Système, conditions initiales et forces

- Tous les systèmes étudiés dans ce Chapitre sont soumis au champ de pesanteur terrestre.
- Ces systèmes sont supposés ponctuels (masse au centre de gravité).
- Et on suppose que les conditions initiales sur le mouvement sont connues (position initiale : [$x(t=0)$; $y(t=0)$; $z(t=0)$] et vitesse initiale : [$v_x(t=0)$; $v_y(t=0)$; $v_z(t=0)$]).
- Les forces appliquées à un tel système sont :
  - Son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
  - La force de frottement dans l'air : $\overrightarrow{F_s}$
- Si la vitesse du système est suffisamment faible, on pourra négliger la force de frottement $\overrightarrow{F_s}$.

1.2. Chute verticale sans frottements

- On considère une masse ponctuelle m qui tombe sans frottements à partir de l'origine O du repère (Oz), et avec une vitesse initiale nulle.
- La seule force appliquée à ce système est son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$
- La RFD s'écrit alors :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$$



- Autrement dit, l'accélération du mouvement est l'accélération de la pesanteur et la trajectoire est parallèle à l'axe (Oz) vertical.
- On projette $\vec{a} = \vec{g} = \|\vec{g}\|\,\vec{k}$ sur cet axe (dirigé vers le bas) et on obtient une unique composante pour l'accélération : $a_z = g$.

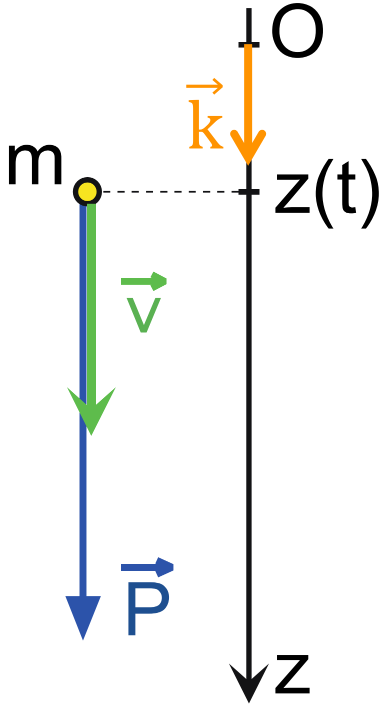
- On en déduit l'expression de la vitesse par intégration :

$$v_z = g\,t + v_o$$

où v_o est la constante d'intégration que l'on détermine grâce à la condition initiale sur la vitesse : v(t=0) = 0 soit : v_o = 0.

- On a donc explicitement le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = v_z\,\vec{k} = (g\,t)\,\vec{k}$$



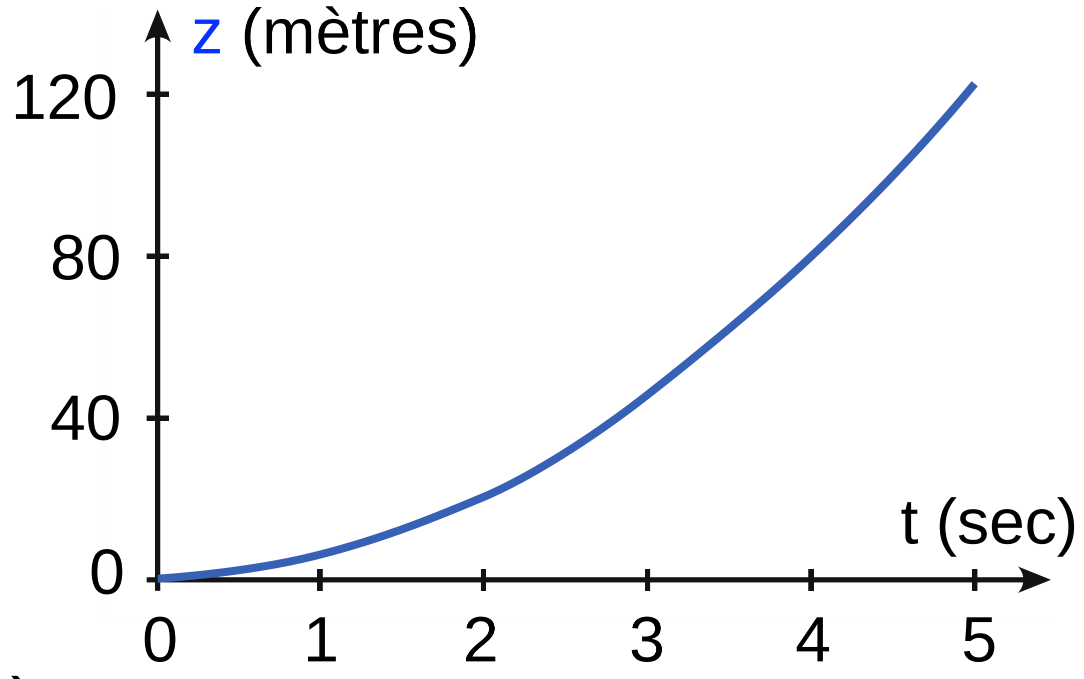
- L'accélération étant constante (g = 9,81 m/s^2), la vitesse de chute augmente linéairement avec le temps :

  - après 1 seconde, la vitesse vaut : $v_z(t = 1s) = 9{,}81\ m/s$
  - après 2 seconde, la vitesse vaut : $v_z(t = 2s) = 19{,}62\ m/s$
  - après 3 seconde, la vitesse vaut : $v_z(t = 2s) = 29{,}43\ m/s$ etc.

- De la même façon, on exprime la position en intégrant la vitesse :

$$z = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + z_o$$

où z_o est la constante d'intégration qui dépend de la condition initiale sur la position : $z(t{=}0) = 0$ soit : $z_o = 0$.



- On obtient explicitement la position :

$z(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$ (dépendance parabolique)

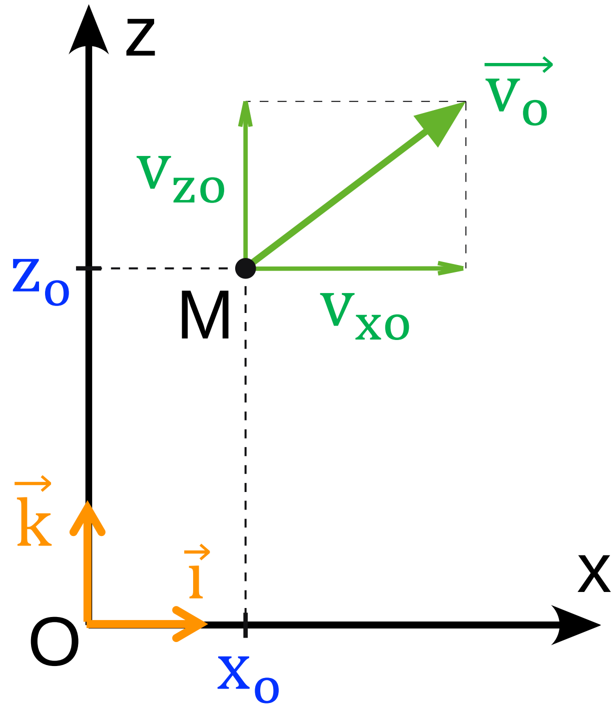
- Remarque : dans l'expression de la RFD, on a simplifié par la masse :

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

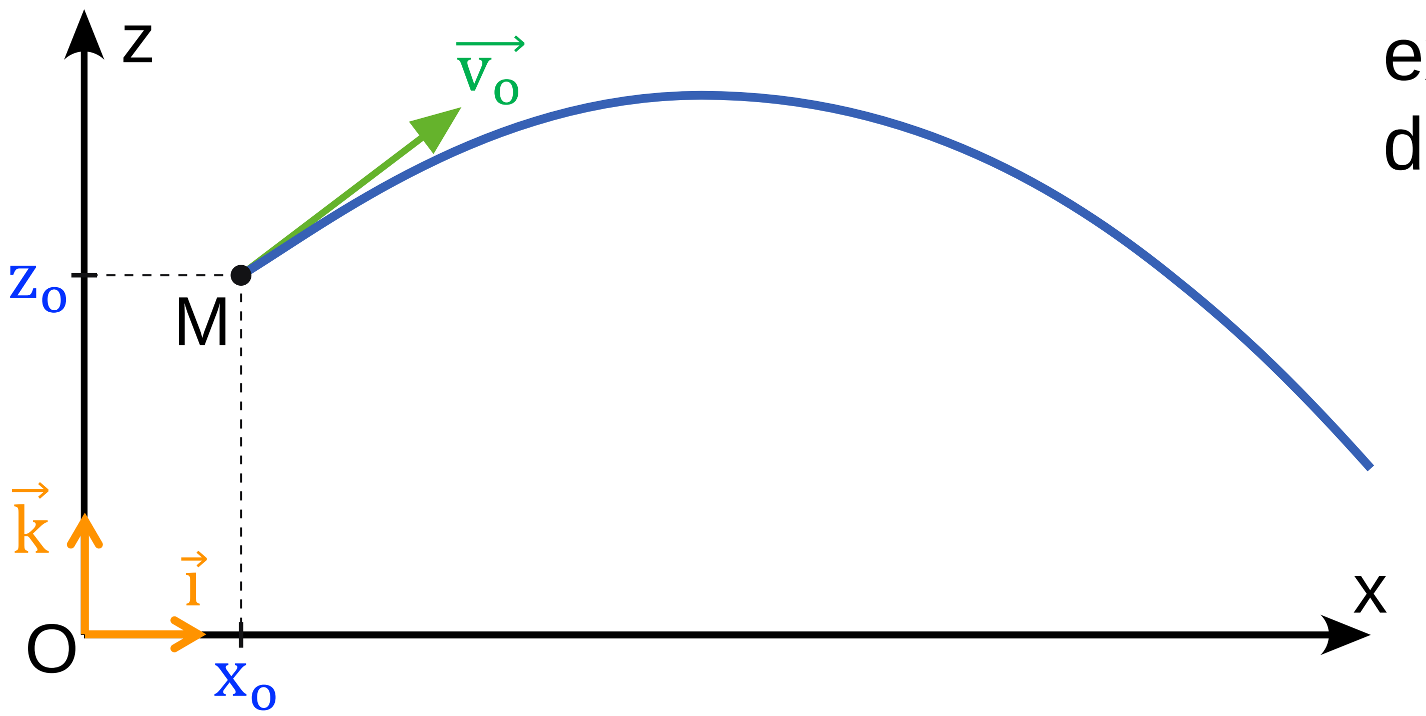
- On voit que les équations de la chute libre ne dépendent pas de la masse du système.

1.3. Chute libre quelconque

- On considère encore un mouvement dans le champ de pesanteur et sans frottements, mais cette fois on suppose que le système possède une vitesse initiale non nulle : $\overrightarrow{v_o}$.
- On définit un repère supposé Galiléen (Oxz) contenant le vecteur $\overrightarrow{v_o}$. Les composantes de $\overrightarrow{v_o}$ sont : $\overrightarrow{v_o}\begin{Bmatrix} v_{xo} \\ v_{zo} \end{Bmatrix}$
- NB : on choisit cette fois (arbitrairement) un axe (Oz) dirigé vers le haut.
- Par ailleurs, on suppose que la position initiale du système est quelconque : à l'instant t = 0, les composantes sont : $\overrightarrow{OM}\begin{Bmatrix} x_o \\ z_o \end{Bmatrix}$



- Comportement intuitif :
- D’après les conditions initiales, on devine que le système va continuer à monter… jusqu’à ce que l’attraction terrestre le fasse redescendre.
- La trajectoire aura l’allure suivante :



- Nous allons déterminer explicitement la trajectoire de ce mouvement.

- La seule force appliquée à ce système est son poids : $\vec{P} = m\vec{g}$ et la RFD s'écrit : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\vec{a}$

- L'accélération du mouvement est l'accélération de la pesanteur qui s'écrit : $\vec{a}\begin{Bmatrix} a_x \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$ dans le repère (Oxz).

  Où $g = \|\vec{g}\|$: l'accélération est constante et orientée suivant -Oz.

- La vitesse initiale et les forces étant toutes dans le plan (Oxz), la trajectoire restera dans le plan (Oxz).

- Connaissant l'accélération, on détermine la vitesse en intégrant par rapport au temps : $\vec{a}\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \Longrightarrow \vec{v}(t)\begin{Bmatrix} v_x(t) \\ v_z(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xo} \\ -gt + v_{zo} \end{Bmatrix}$

- On voit que la composante $v_x(t) = v_{xo}$ est constante.
- Par contre, la composante $v_z(t) = -gt + v_{zo}$ dépend linéairement du temps.
- Connaissant la vitesse, on détermine maintenant la position en intégrant encore une fois par rapport au temps :

$$\vec{v}(t)\begin{Bmatrix} v_{xo} \\ -gt + v_{zo} \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t)\begin{Bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xo}t + x_o \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{zo}t + z_o \end{Bmatrix}$$

où x_o et z_o sont les constantes d'intégration correspondant à $\overrightarrow{OM}(t = 0)$.

- On peut également exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{k}$ du repère (Oxz) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (v_{xo}t + x_o)\,\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{zo}t + z_o\right)\,\vec{k}$$

- Conséquences :

  Cette expression permet de déterminer plusieurs caractéristiques du mouvement :

1) On détermine le point où l'altitude z est maximale (= apogée) : la fonction z(t) passe par un maximum (sa dérivée s'annule) :

$$\frac{d\,z(t)}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_z(t) = 0$$

- Ce qui donne : $v_z(t) = -g\,t + v_{zo} = 0$ soit : $t_{apogée} = v_{zo}/g$

  (on peut vérifier que cette équation est bien homogène :

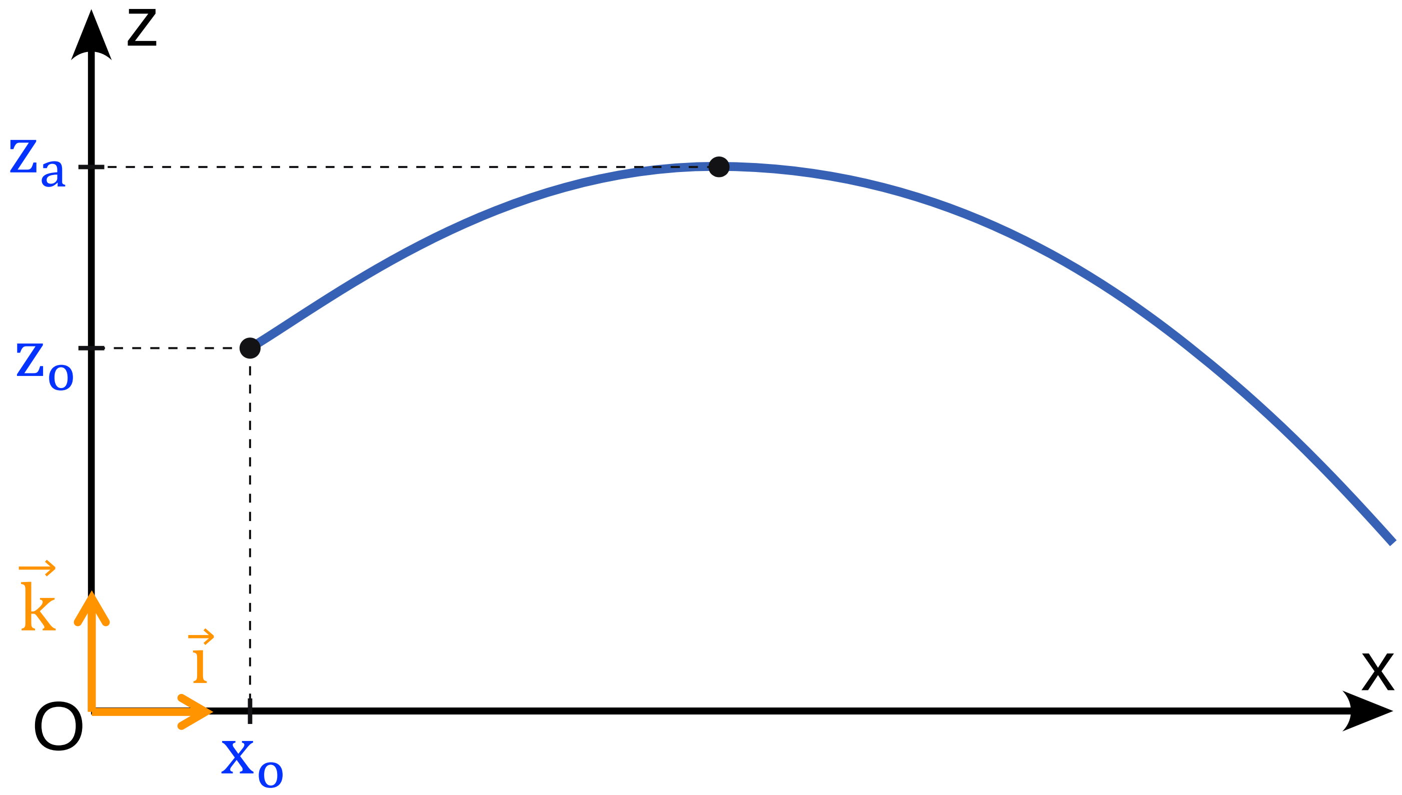
  $[t_{apogée}] = [v_{zo}] / [g] = (L.T^{-1}) / (L.T^{-2}) = T$)

- On calcule alors l'altitude correspondante :

$$z(t_{apogée}) = -\frac{1}{2}g(t_{apogée})^2 + v_{zo}\,t_{apogée} + z_o$$

- et après un calcul simple, on voit que l'altitude de l'apogée (notée z_a) s'écrit :

$$z(t_{apogée}) = z_a = z_o + \frac{v_{zo}^2}{2g}$$



2) On détermine ensuite la trajectoire.

A partir des expressions de x et z :

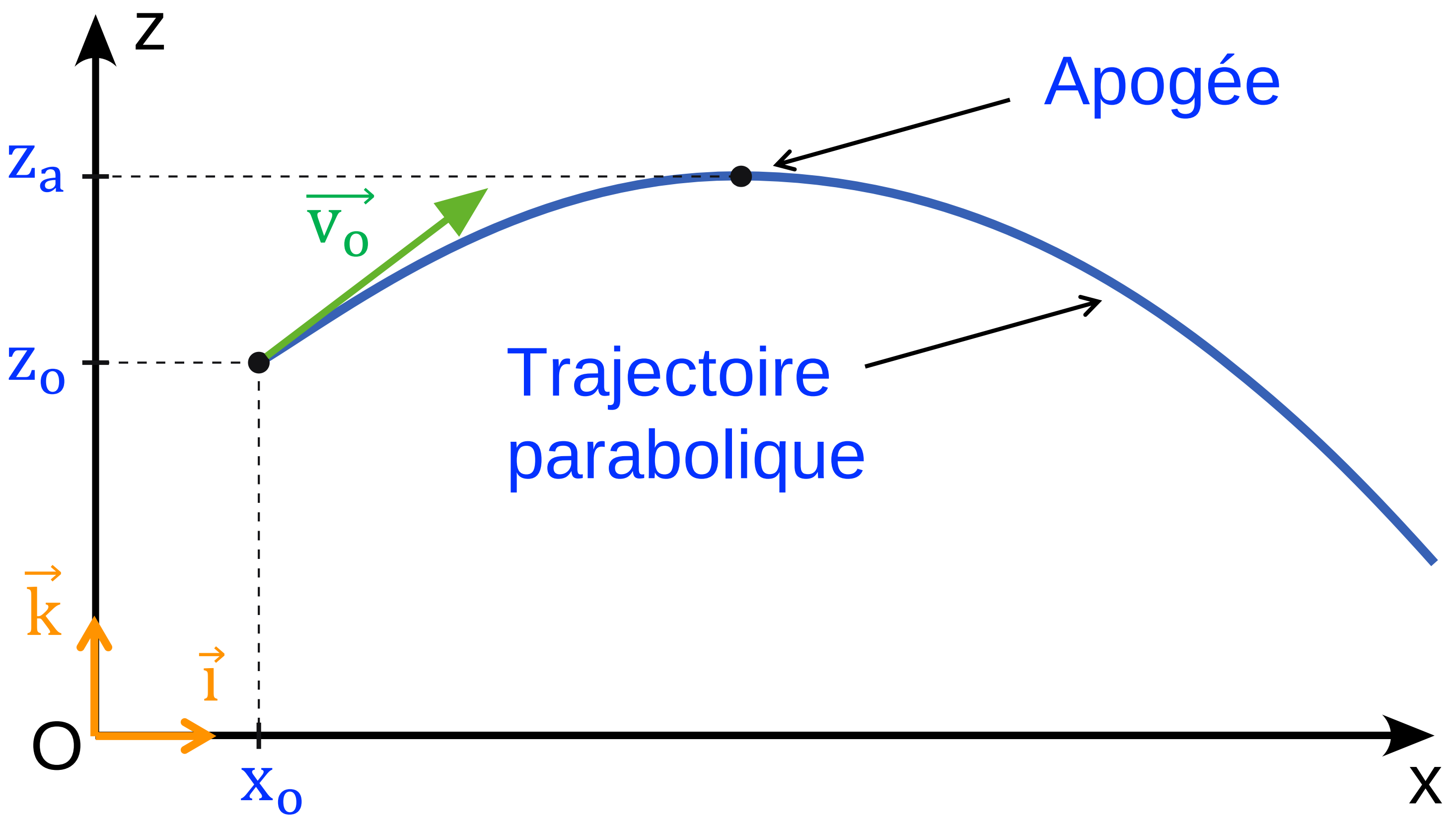
$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_{xo} t + x_o \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_{zo} t + z_o \end{Bmatrix}$$

- on écrit d'abord le temps sous la forme : $t = \frac{x - x_o}{v_{xo}}$ et on substitue cette expression dans l'équation de z(t) :

$$z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_o}{v_{xo}}\right)^2 + v_{zo} \left(\frac{x - x_o}{v_{ox}}\right) + z_o$$

- La dépendance au temps a disparu. On pourrait développer l'expression et montrer que c'est une fonction f(x,z) de la forme : $z = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$ qui est l'équation d'une parabole.
- (le calcul général de α, β et γ ne présente ici pas d'intérêt).

- Ces résultats peuvent être résumés dans cette figure :



- Remarque : on pourrait retrouver les résultats du paragraphe « Chute verticale sans frottements » en prenant les conditions initiales :

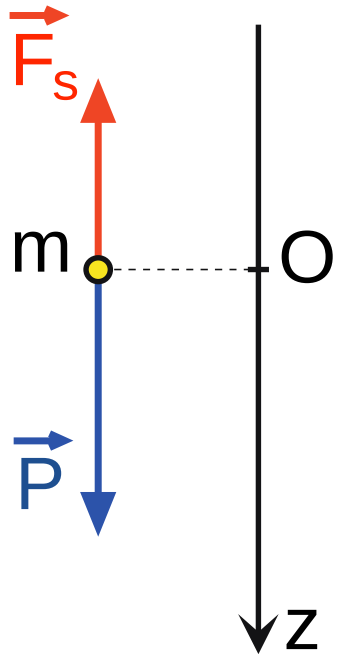
$$\vec{v}_o \begin{Bmatrix} v_{xo} \\ v_{zo} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}(t=0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- NB : il faut comprendre les raisonnements, mais les équations qui précèdent ne sont pas à apprendre par cœur !

1.4. Chute verticale avec frottements

- On considère une sphère de masse m qui tombe sous l'effet de son poids ($\vec{P} = m\vec{g}$) à partir de l'origine O du repère (Oz), et avec une vitesse initiale nulle. Mais cette fois, on prend en compte la force de frottements visqueuse de Stokes : $\vec{F_s}$.
- Rappelons que $\vec{F_s} = -6\pi\eta R\,\vec{v}$ où η est la viscosité du fluide (air) et R est le rayon de la sphère (considérée comme ponctuelle).
- La RFD s'écrit : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{F_s} = m\,\vec{g} - 6\pi\eta R\,\vec{v} = m\,\vec{a}$
- C'est une équation qui fait intervenir à la fois la vitesse et l'accélération du système. On simplifie cette équation en projetant d'abord ces vecteurs sur l'axe (Oz) :



- L'axe Oz étant dirigé vers le bas, on a :

$$m\,\vec{g} - 6\pi\eta R\,\vec{v} = m\,\vec{a} \quad \Longrightarrow \quad mg\,\vec{k} - 6\pi\eta R v_z\,\vec{k} = m a_z\,\vec{k}$$

- Que l'on peut écrire : $a_z + (6\pi\eta R/m)\,v_z = g$
- Puis on écrit : $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ pour avoir une seule variable :

$$\frac{dv_z}{dt} + (6\pi\eta R/m)\,v_z = g$$

- C'est une équation différentielle du premier ordre (faisant intervenir la variable v_z et sa dérivée première dv_z/dt), à coefficients constants ($6\pi\eta R/m$ ne dépend pas du temps), et avec second membre (g).
- C'est une équation classique en Maths. Mais ici, on donnera la solution sans démonstration.

$$\frac{dv_z}{dt} + (6\pi\eta R/m)\, v_z = g \quad \Rightarrow \quad \text{solution : } v_z(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

- où v_{lim} est la vitesse limite (asymptotique) pour $t \to \infty$:

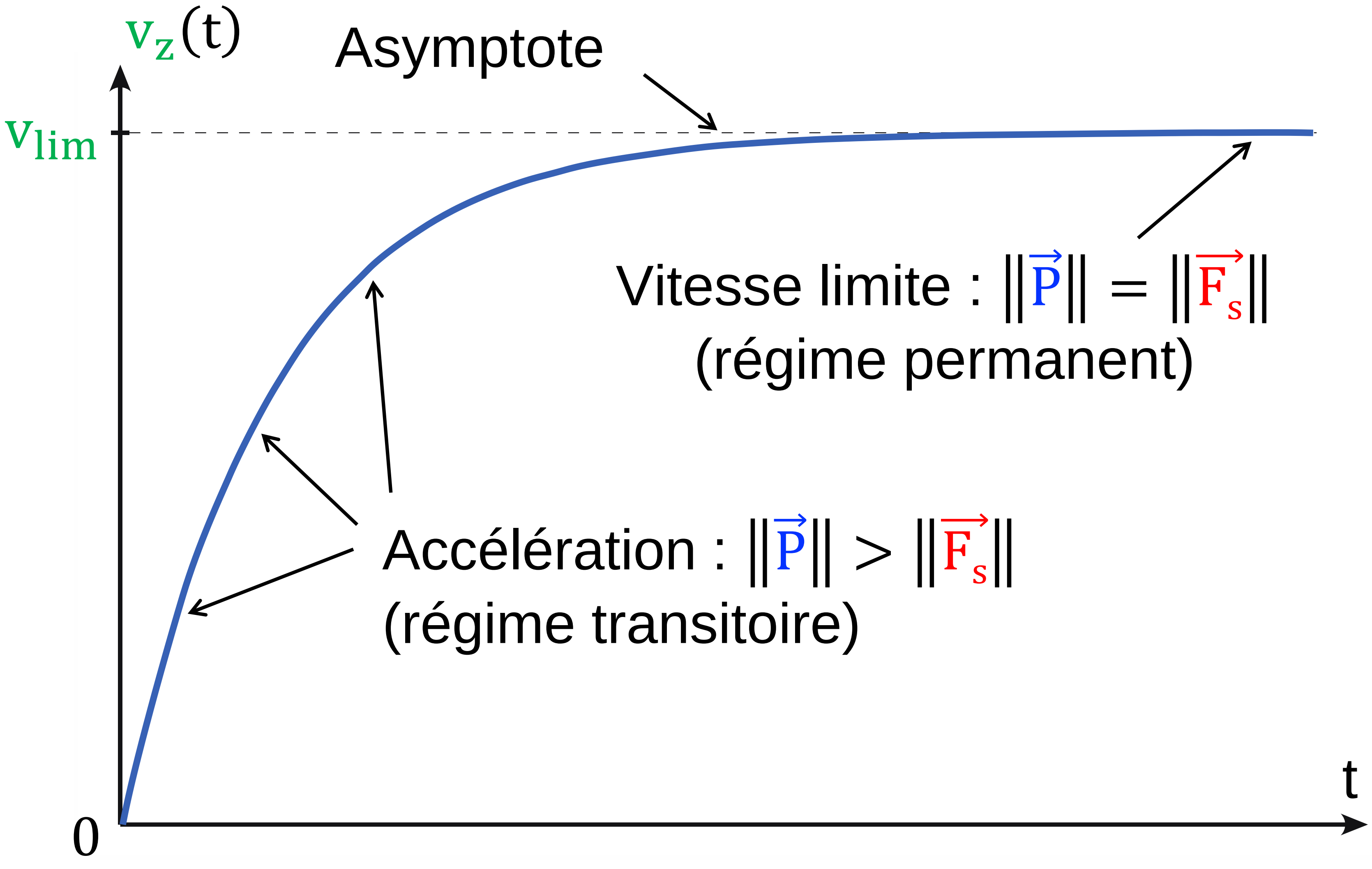
$$v_{lim} = \frac{mg}{6\pi\eta R}$$

et τ est la constante de temps du mouvement, qui s'écrit :

$$\tau = \frac{m}{6\pi\eta R} = \frac{v_{lim}}{g}$$

- On peut vérifier que cette solution vérifie bien l'équation de départ.
- En se souvenant que la dimension de la viscosité est : $[\eta]$ = $M.L^{-1}.T^{-1}$ on peut aussi vérifier que $6\pi\eta R$ est homogène à $M.T^{-1}$ et que $\tau = m/6\pi\eta R$ est bien homogène à un Temps.
- On peut alors représenter la vitesse en fonction du temps de chute :

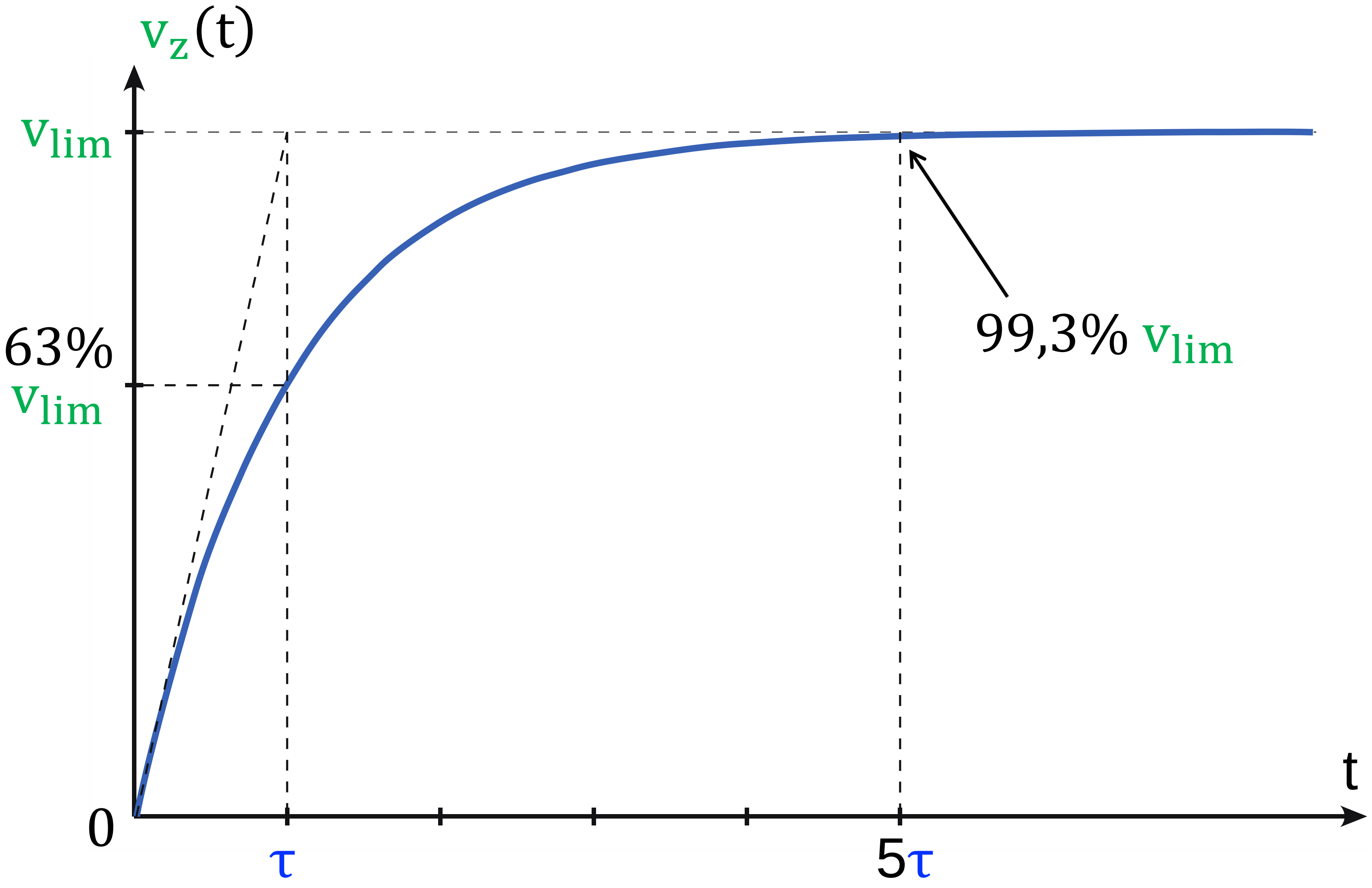
$$v_z(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



Qualitativement :

- Au début de la chute, v est faible, donc $\|\vec{F_s}\|$ est faible et $\|\vec{P}\| > \|\vec{F_s}\|$: le système accélère.
- Puis v se rapproche de v_{lim} et $\|\vec{F_s}\|$ se rapproche de $\|\vec{P}\|$: l'accélération s'annule et la vitesse devient constante.

$$v_z(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



Quantitativement :

- On peut calculer qu'au temps $t = \tau$, la vitesse vaut 63% de la vitesse v_{lim}.
- Rapidement, la vitesse est indiscernable de l'asymptote. Par exemple à $t = 5\tau$, la vitesse vaut 99,3% de v_{lim}.

- Connaissant explicitement la vitesse, on peut déterminer l'altitude z par intégration : la primitive de $v_z(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ s'écrit :

$$z(t) = v_{lim} t + v_{lim} \tau \, e^{-t/\tau} + z_o$$

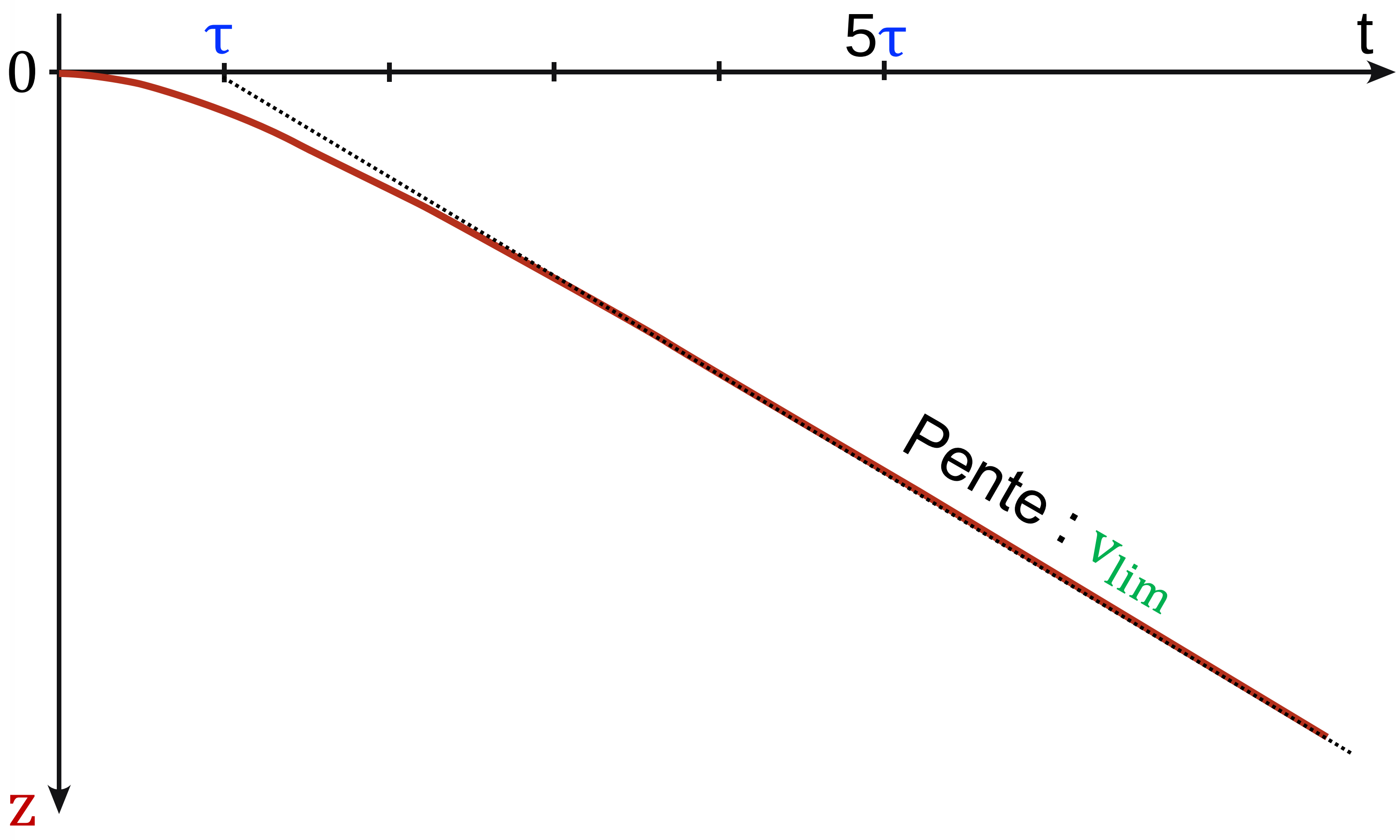
où z_o est la constante d'intégration que l'on détermine grâce à la condition initiale sur la position.

- Comme le point de départ de la chute est situé à l'origine de l'axe (Oz), on a $z(t = 0) = 0$. D'où l'on déduit que : $z_o = -v_{lim}\tau$.
- Finalement, après factorisation, l'altitude s'écrit :

$$z(t) = v_{lim}\left[t + \tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right]$$

- (NB : toutes ces équations ne sont pas à apprendre par cœur !)
- Cette expression permet de représenter l'altitude en fonction du temps de chute :

$$z(t) = v_{lim}\left[t + \tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right]$$



Qualitativement :

- Au début, la chute, est lente.
- Rapidement (au delà de $t > 5\tau$ par exemple), le terme $e^{-t/\tau} \approx 0$, et l'altitude diminue linéairement avec le temps : $z(t) \approx v_{lim}(t - \tau)$ (avec (Oz) dirigé vers le bas)

- Remarque sur la constante de temps
- La constante de temps $\tau = m/6\pi\eta R$ est aussi appelée ‘temps caractéristique de mise à l’équilibre du système’.
- Cette grandeur caractérise la compétition entre le poids (accélération de la chute) et la force de frottement (freinage de la chute).

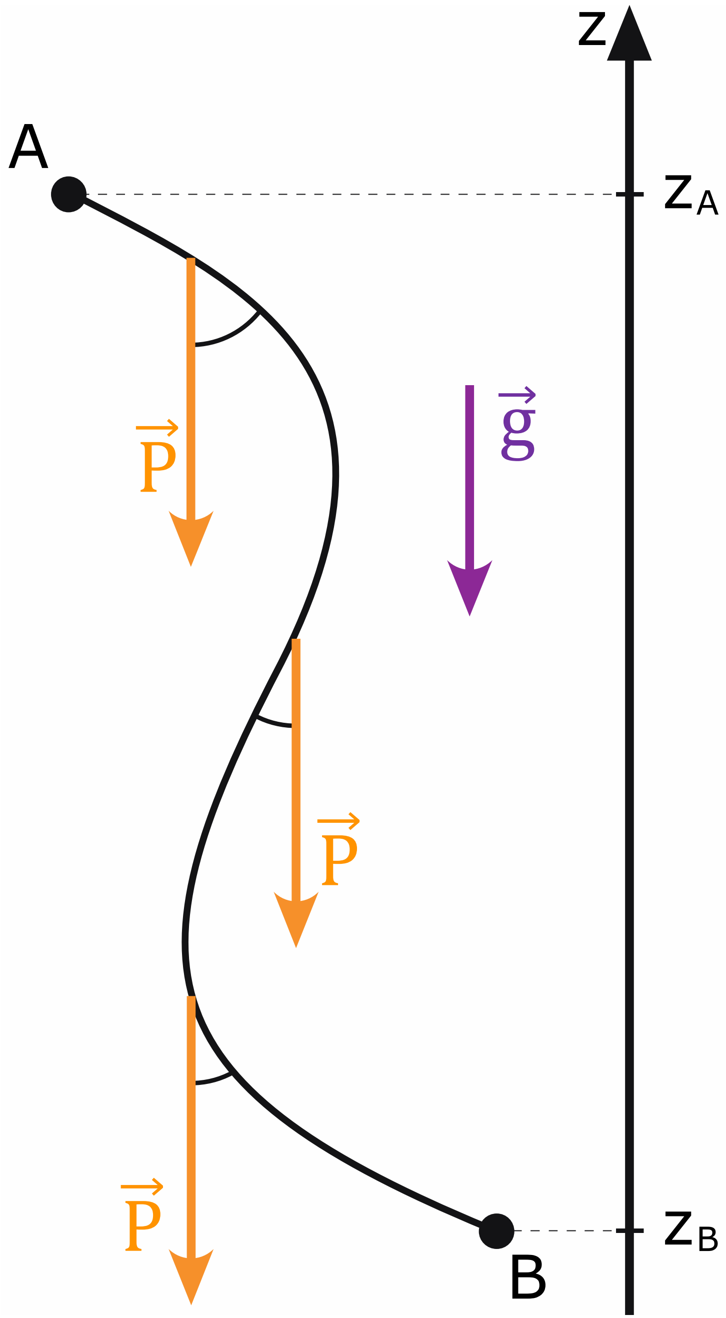
- Limites de ce modèle : approximations
- La force de Stokes n’est valable que pour des vitesses de chute faibles (régime laminaire du fluide autour de la sphère). Si la vitesse devient grande, il faut utiliser une autre expression de la force de frottements (force proportionnelle à v^2 ou à v^3).
- (On n’a pas pris en compte la poussée d'Archimède, dont le module peut devenir comparable au Poids si la masse volumique du système est comparable à celle du fluide).

- Ordres de grandeur
- La vitesse limite de chute pour des poussières (éventuellement polluantes) ou des gouttelettes d'aérosol (éventuellement contaminées) conditionne leur « durée de vie » en suspension dans l'air.
- Voici quelques ordres de grandeur :

Diamètre du système (µm)	v_{lim} (m/s)	Temps pour tomber de 1 m
0,01	quelques 10^{-8}	≈ Année
1	quelques 10^{-5}	≈ Jours
100	quelques 10^{-1}	≈ Seconde

1.5. Aspects énergétiques

- Si un objet perd de l'altitude sous l'effet de la gravité, le poids produit un travail.
- Intéressons-nous au mouvement quelconque d'un système de masse m, d'un point A vers un point B (l'axe (Oz) est dirigé vers le haut et $z_A > z_B$).
- La trajectoire est quelconque et la vitesse est quelconque…
- Le poids $\vec{P}$ est toujours vertical, dirigé vers le bas (comme l'accélération $\vec{g}$).



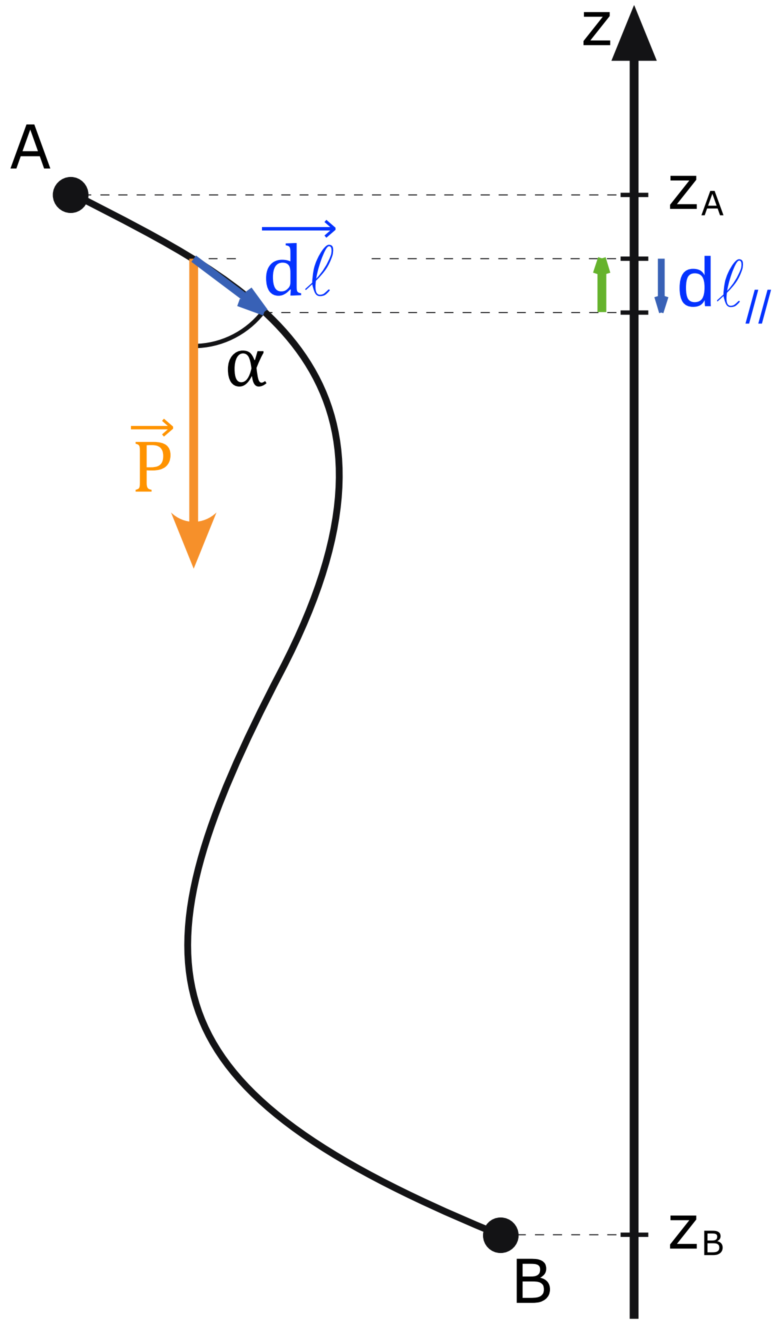
- On écrit le travail élémentaire du poids pour un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{d\ell}$:

$$\delta W = \vec{P}.\overrightarrow{d\ell} = mg\ d\ell \cos(\alpha)$$

- On voit que la composante de $\overrightarrow{d\ell}$ parallèle au poids, correspond au déplacement $d\ell_{//} = d\ell \cos(\alpha)$ (dans le même sens que $\vec{P}$).

- Le travail est donc positif : dans ce mouvement le poids est une force motrice.

- On peut déterminer le travail total W_{AB} fourni par le poids, de A jusqu'à B.



- Le travail total s'écrit :

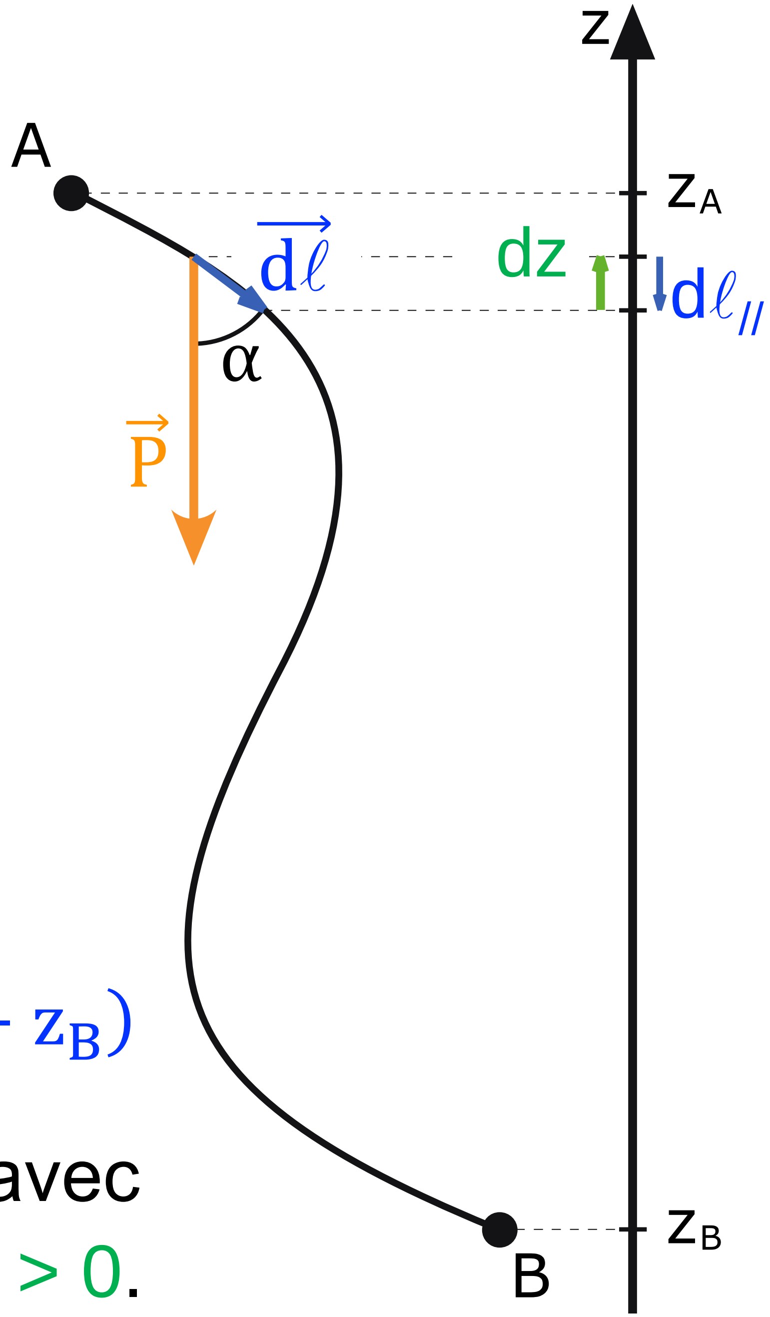
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{P}.\overrightarrow{d\ell_{//}} = \int_A^B P.d\ell_{//}$$

- où le déplacement $d\ell_{//}$ est l'opposé de l'incrément dz mathématique : $d\ell_{//} = - dz$.

- On a donc : $W_{AB} = \int_A^B P.(-dz) = -P\int_A^B dz$

- Finalement : $W_{AB} = -mg\,(z_B - z_A) = mg\,(z_A - z_B)$

- Comme on s'y attendait, en allant de A vers B avec $z_A > z_B$, le poids produit un travail moteur : $W_{AB} > 0$.



- Sur l'ensemble du mouvement, le travail du poids ne dépend que des altitudes de départ et d'arrivée : $W_{AB} = mg\,(z_A - z_B) > 0$.

- Si l’on s’était déplacé de B vers A, on aurait obtenu un résultat opposé : pour un mouvement du bas vers le haut, le poids produit un travail résistant : $W_{BA} = mg\,(z_B - z_A) < 0$. Mais ce travail ne dépend toujours que des altitudes de départ et d'arrivée !

- On observe que le travail du poids est égal à l’opposé de la variation de l’énergie potentielle : $W_{AB} = -[E_{p\ finale} - E_{p\ initiale}]$

- Dans un Chapitre suivant, on verra que ceci est caractéristique des forces ‘conservatives’ (le poids est une force ‘conservative’) et on généralisera cette notion à d’autres forces.

Conclusion

- Dans ce Chapitre, nous avons étudié le mouvement de chute libre sous différentes approches :
  – Chute verticale sans frottements
  – Chute quelconque
  – Chute verticale avec frottements
  – Aspects énergétiques
- Dans le Chapitre suivant, nous étudierons :
  – Quelques forces microscopiques

Mentions légales