*Physique*

Chapitre 7

# Forces conservatives et énergies potentielles

Dr. Benoît CHABAUD

# Objectifs

- Dans ce Chapitre, on va présenter
  - Les caractéristiques des forces conservatives.
- Et on va illustrer les propriétés des forces conservatives sur trois exemples :
  - Le poids,
  - La force de rappel d’un ressort,
  - Et la force de Van der Waals.
- Enfin, on présentera
  - Le Théorème de l’énergie cinétique.

# 1.1. Travail d’une force conservative

- Définition
- Une force est conservative lorsque le travail produit par cette force est indépendant du chemin suivi par son point d’application.
- Cette définition s’accompagne de trois propriétés :

  1. L’énergie mécanique d'un système soumis uniquement à des forces conservatives est constante,
  2. Une force conservative dérive d'une énergie potentielle,
  3. Le travail exercé par la force est égal à l'opposé de la variation de l’énergie potentielle.

- On va illustrer ces propriétés (dont certaines découlent de théorèmes mathématiques) sur quelques forces particulières.

- Remarques préliminaires

1) Les forces de frottements (comme la force de Stokes) sont dissipatives (= non conservatives) : lorsque ces forces travaillent, l'énergie du système est progressivement dégradée en chaleur (Q).

2) Quand on dit qu'une force conservative $\vec{F}$ « dérive d'une énergie potentielle $E_p$ », cette $\vec{F}$ est égale à l'opposé de la dérivée de $E_p$ par rapport aux variables d'espace : x, y et z :

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{dE_p}{dx}\vec{i} + \frac{dE_p}{dy}\vec{j} + \frac{dE_p}{dz}\vec{k}\right)}$$

[!]

Le signe − (sens opposé à la dérivée) implique que la force tend à faire évoluer le système vers un état d'énergie potentielle minimale.

3) Dans l'expression : $\vec{F} = -\left(\frac{dE_p}{dx}\vec{i} + \frac{dE_p}{dy}\vec{j} + \frac{dE_p}{dz}\vec{k}\right)$ on peut vérifier que la dérivée d'une énergie (en Joules) par rapport à une distance (en mètres) est bien homogène à une force (en Newton).

4) Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près (par exemple, l'énergie potentielle de pesanteur dépend du choix arbitraire de l'origine de l'axe Oz).

- Cette constante disparaît dans l'opération de dérivation qui permet de déterminer la force associée.
- Et cette constante disparaît également lorsqu'on s'intéresse à des variations d'énergie potentielle ($\Delta E_p = E_{p\ finale} - E_{p\ initiale}$).

# 1.2. Application au poids

- Force dérivée de l'énergie potentielle
- On a montré dans un Chapitre précédent que le travail du poids entre deux positions A et B ne dépend que des altitudes $z_A$ et $z_B$ de ces points : le poids est donc une force conservative.
- On a vu également que l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit : $E_p(x,y,z) = mg\,z$ ($E_p$ ne dépend que de l'altitude z).
- On peut écrire l'opposé de la dérivée spatiale de $E_p$ :

$$\vec{F} = -\left(\frac{d(mg\,z)}{dx}\vec{i} + \frac{d(mg\,z)}{dy}\vec{j} + \frac{d(mg\,z)}{dz}\vec{k}\right) = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - mg\,\vec{k}$$

On retrouve l'expression du poids : $\vec{P} = mg\,(-\vec{k})$ où $g = \|\vec{g}\|$.

$\rightarrow$ Le poids $\vec{P}$ dérive de l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = mg\,z$.

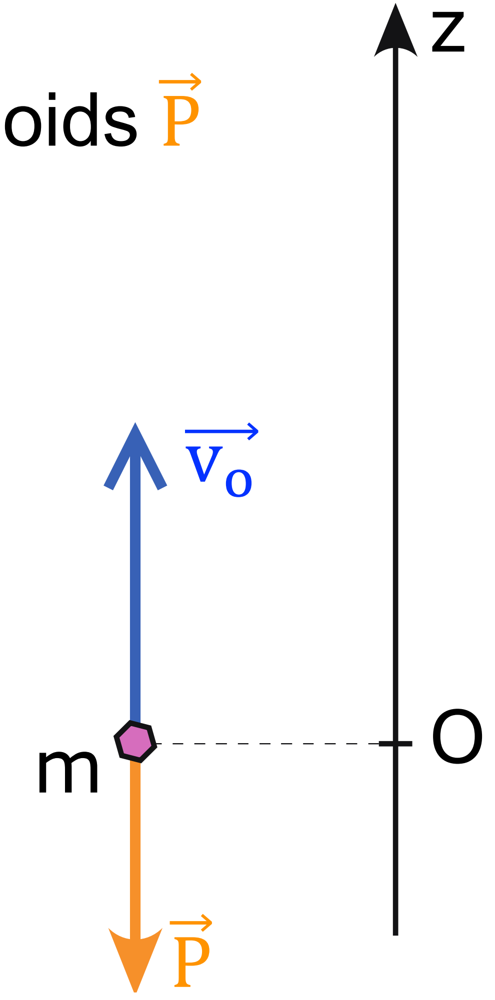
- Application :
- Considérons une masse m lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o}$.
- Une fois lancée, la masse m n'est soumise qu'à son poids $\overrightarrow{P}$ (on néglige ici les frottements dans l'air).

- <u>Conservation de l'énergie mécanique</u> :
- L'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = E_c + E_p = ½\, mv^2 + mg\, z$$

- Pour simplifier, on choisit l'origine de l'axe Oz à l'altitude où se trouve le système à l'instant initial.

  Autrement dit : $E_{po} = 0$.



- A l'altitude de départ, l'énergie mécanique est donc :

$$E_m(z=0) \;=\; \tfrac{1}{2}\, m v_o^2 + 0$$

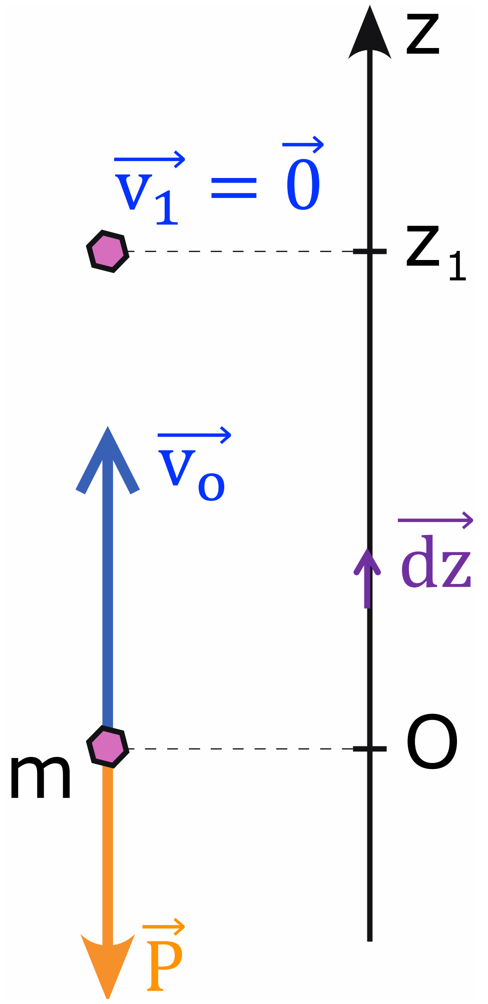
- La masse va atteindre son apogée (vitesse nulle) à l'altitude $z_1$. Son énergie mécanique sera alors :

$$E_m(z=z_1) \;=\; 0 + mg\, z_1$$

- La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$E_m(z=z_1) \;=\; E_m(z=0) \quad \rightarrow \quad z_1 = \frac{v_o^2}{2g}$$

- On vient de déterminer (facilement) l'apogée, à partir de la conservation de l'énergie mécanique (l'approche énergétique est souvent plus simple que l'écriture des équations du mouvement !)



- Travail du poids :
- Calculons le travail du poids, de l'altitude z = 0 à l'altitude $z = z_1$ :

$$W = \int_0^{z_1} \vec{P}.\overrightarrow{dz} = \int_0^{z_1} \|\vec{P}\|.\|\overrightarrow{dz}\| \cos(\widehat{\vec{P}, \overrightarrow{dz}}) = -\int_0^{z_1} P.dz$$

En effet, $\vec{P}.\overrightarrow{dz} < 0$ : le poids est 'récepteur' pour ce mouvement du bas vers le haut.

- Comme le poids est constant, on a :

$$W = -mg \int_0^{z_1} dz = -mg\,[z]_0^{z_1} = -mg\,(z_1 - 0)$$

- On peut écrire ce travail sous la forme :

$$W = -\,[E_p(z=z_1) - E_p(z=0)] = -\,[E_{p\ finale} - E_{p\ initiale}] = -\,\Delta E_p$$

- On vient de vérifier que le travail exercé par le poids est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle (c'est l'une des trois propriétés d'une force conservative).

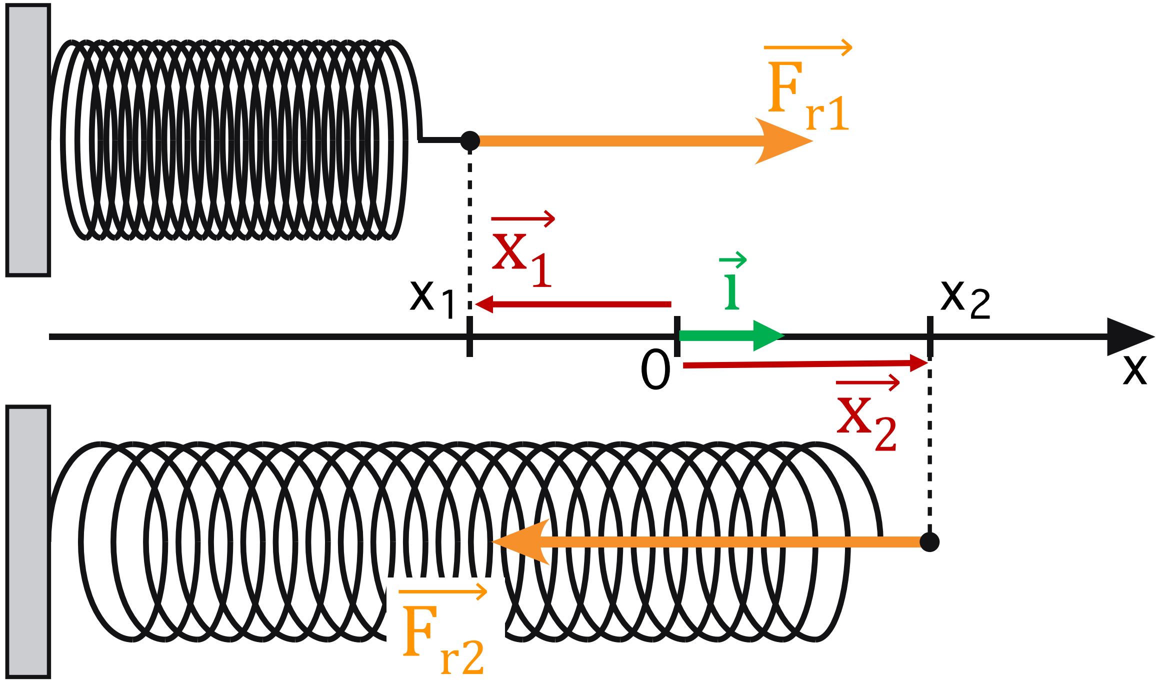
- Discussion du signe moins : $W = -\Delta E_p$
- Dans ce mouvement, l'énergie cinétique est transformée en énergie potentielle à travers le travail du poids.

- Autrement dit, l'énergie cinétique diminue et l'énergie potentielle augmente grâce à un travail négatif :

$$W = -\Delta E_p = \Delta E_c$$

# 1.3. Application à la force de rappel d'un ressort

- Énergie potentielle à partir de la force
- La force exercée par un ressort est : $\overrightarrow{F_r} = -k\,\vec{x}$ (cf. précédent Chapitre).




Ressort comprimé : $\overrightarrow{F_{r1}} = -k\, x_1\, \vec{i}$ avec $x_1 < 0$ (force dans le sens des x croissants)

Ressort étiré : $\overrightarrow{F_{r2}} = -k\, x_2\, \vec{i}$ avec $x_2 > 0$ (force dans le sens des x décroissants).

- Dans tous les cas, la projection de la force sur l'axe Ox s'écrit : $\overrightarrow{F_r} = -k\, x\, \vec{i}$ (la force ne dépend que de la variable x).

- Par identification avec l'expression : $\vec{F} = -\left(\frac{dE_p}{dx}\vec{i} + \frac{dE_p}{dy}\vec{j} + \frac{dE_p}{dz}\vec{k}\right)$

  on voit que pour un ressort : $\frac{dE_{pr}}{dx} = kx$ ou encore : $E_{pr} = \int kx\,dx$

- C'est à dire : $E_{pr} = \frac{1}{2} kx^2 + cte$.

- En général, on simplifie le problème en prenant la constante d'intégration égale à 0.

- Finalement, l'énergie potentielle élastique d'un ressort s'écrit :

$$\boxed{E_{pr} = \frac{1}{2} kx^2}$$

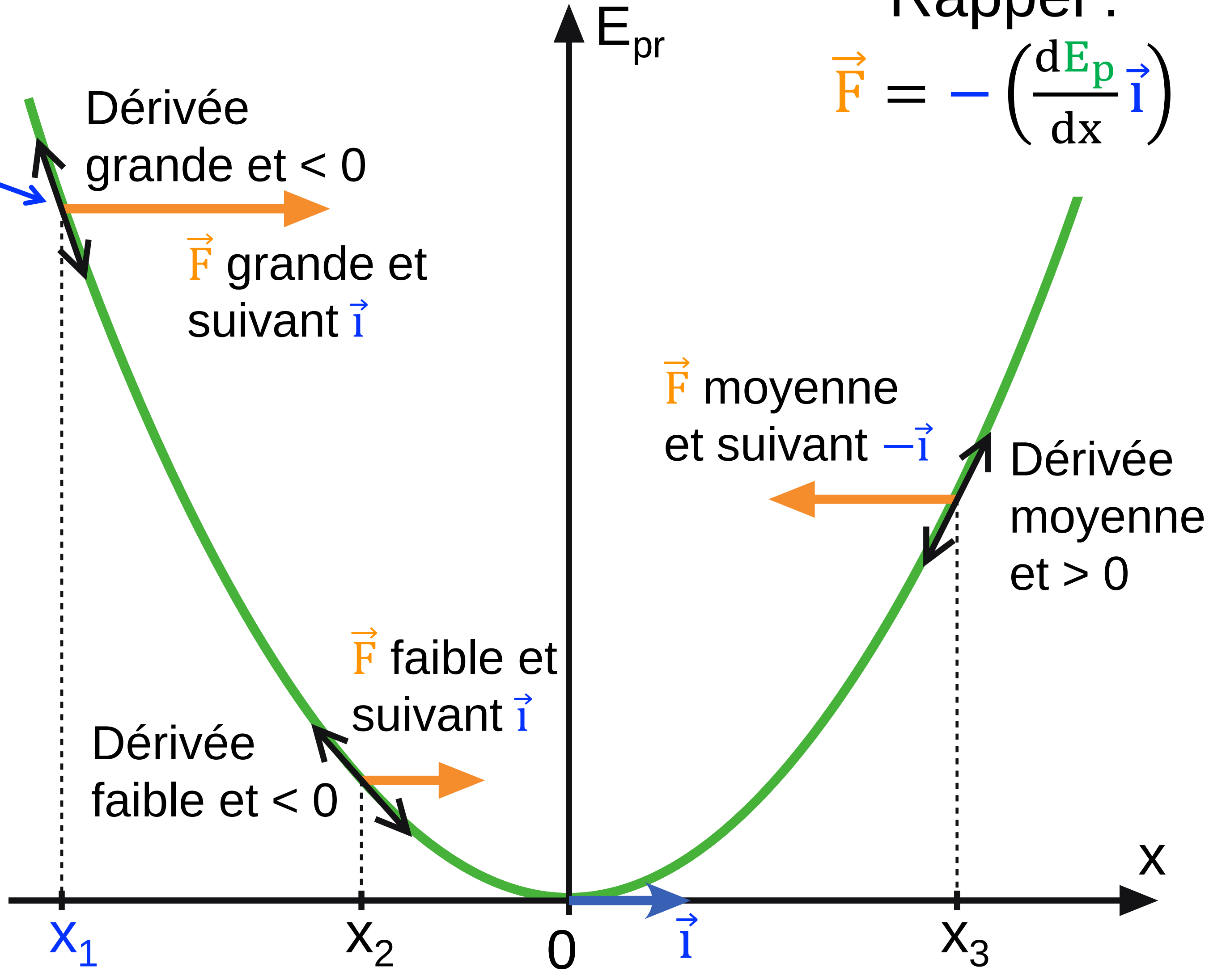
[!]

cette énergie $E_{pr}$ est toujours positive (que le ressort soit étiré ou comprimé).

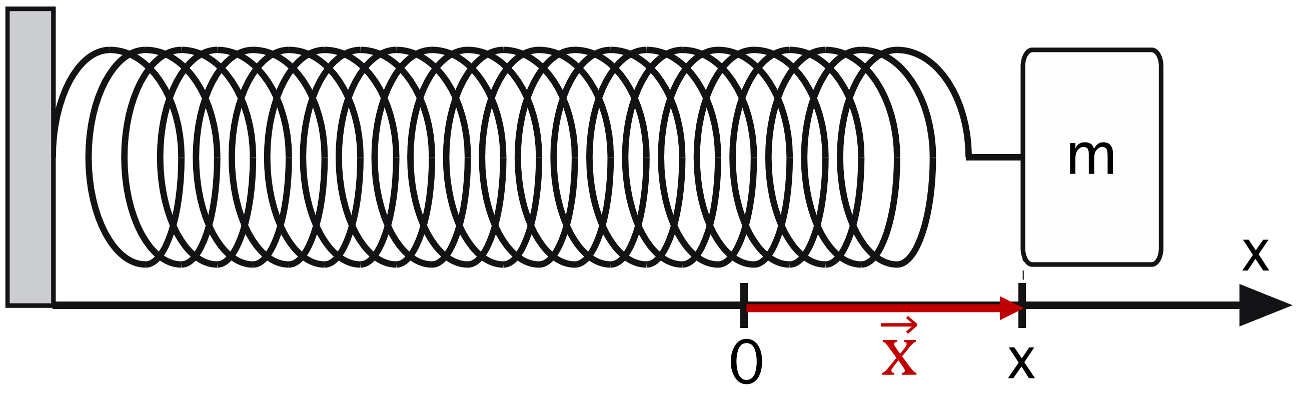
- On peut représenter le potentiel parabolique $E_{pr} = (1/2)\,kx^2$ en fonction de l'élongation x du ressort :
- On voit que pour une position 'très comprimée' $x_1 << 0$ le ressort exerce une force intense, proportionnelle à l'opposé de la dérivée de la parabole (qui est grande).
- On peut faire le même type de raisonnement pour les positions $x_2$ ou $x_3$.
- En x = 0, la dérivée et la force s'annulent : c'est la position d'équilibre.

Rappel :

$$\vec{F} = -\left(\frac{dE_p}{dx}\vec{i}\right)$$



- <u>Conservation de l’énergie mécanique</u> :
- Considérons le système constitué d’un ressort auquel est accroché une masse m qui peut glisser horizontalement sans frottements :

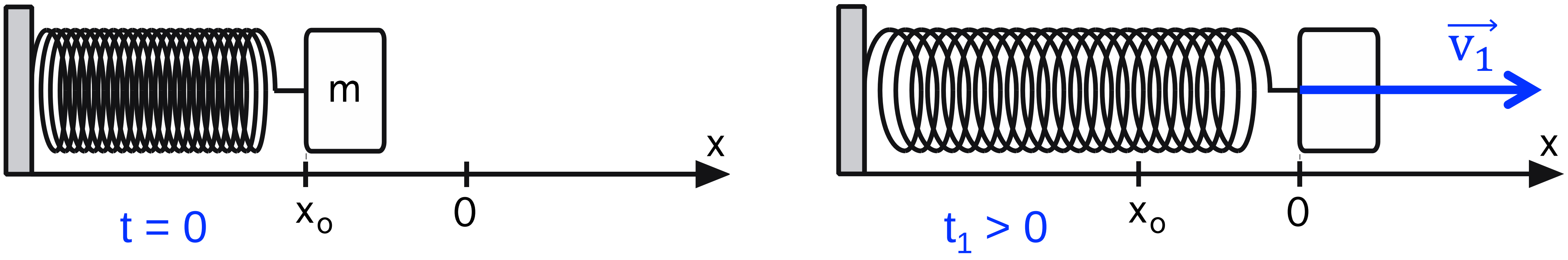



- La déformation du ressort est mesurée par la variable x.
- L’énergie mécanique de ce système s’écrit :

$$E_m = E_c + E_{pr} = ½\, mv^2 + ½\, kx^2$$

(on suppose que le ressort a une masse propre négligeable : on ne prend en compte que l’énergie cinétique de la masse m).

- Supposons qu'à l'instant $t = 0$, on lâche la masse m sans vitesse initiale à partir de la position $x_o < 0$ (ressort comprimé) :




- Dans la position de départ (en $x = x_o$), l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m(x=x_o) \; = \; 0 + ½\, k\, x_o^{\,2}$$

- Sous l'effet de la force du ressort (qui se détend), la masse va accélérer et passer par la position $x = 0$ avec une vitesse $\vec{v_1}$.
  A cet instant, l'énergie mécanique sera :

$$E_m(x=0) \; = \; ½\, m\, v_1^{\,2} + 0$$

- La position x = 0 correspond au maximum de la vitesse.
- On peut déterminer cette vitesse maximale en écrivant que l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m(x=0) \;=\; E_m(x=x_o) \;\rightarrow\; \tfrac{1}{2}\, k\, x_o^2 = \tfrac{1}{2}\, m\, v_1^2$$

- Ce qui donne : $\|\overrightarrow{v_1}\| = \|\overrightarrow{v_{max}}\| = \sqrt{\frac{k}{m}}\,|x_o|$

  (entre les positions $x_o$ et 0, cette vitesse est orientée vers les x croissants).

- On vient de déterminer (facilement) la vitesse maximale du système à partir de la conservation de l'énergie mécanique (approche énergétique très simple).

- Travail de la force du ressort :
- Calculons le travail de la force du ressort $\overrightarrow{F_r}$ lorsqu'il se détend de la position $x = x_o < 0$ à la position $x = 0$ :

$$W = \int_{x_o}^{0} \overrightarrow{F_r}.\overrightarrow{d\ell} = \int_{x_o}^{0} \|\overrightarrow{F_r}\|.\|\overrightarrow{d\ell}\|$$

car la force et le déplacement sont dans le même sens : $\overrightarrow{F_r}$ est motrice.

- Le travail s'écrit alors :

$$W = \int_{x_o}^{0} |-kx|.\,dx = \int_{x_o}^{0} (-kx).\,dx = \left[-\frac{1}{2}k\,x^2\right]_{x_o}^{0} = 0 + \frac{1}{2}k\,x_o^2$$

- et on peut écrire ce travail sous la forme :

$$W = -\,[E_{pr}(x=0) - E_{pr}(x=x_o)] = -\,[E_{pr\ finale} - E_{pr\ initiale}] = -\,\Delta E_{pr}$$

- On vérifie à nouveau que le travail exercé par la force de rappel du ressort est égal à l'opposé de la variation de l’énergie potentielle élastique (c’est l’une des trois propriétés d’une force conservative).

- Discussion du signe moins : $W = -\Delta E_{pr}$
- Dans ce mouvement, l’énergie potentielle élastique (de compression) du ressort est transformée en énergie cinétique à travers le travail de la force du ressort.

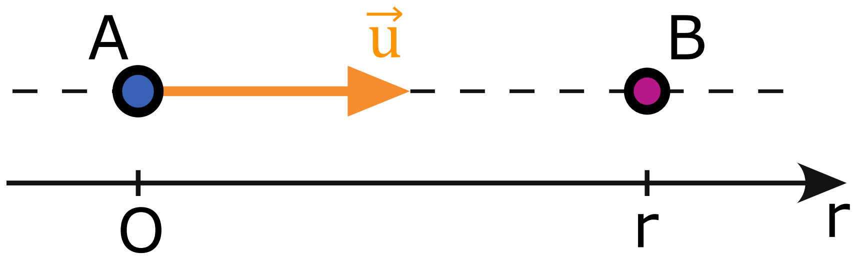
- Autrement dit, l’énergie potentielle élastique diminue et l’énergie cinétique augmente grâce à un travail positif :

$$W = -\Delta E_{pr} = \Delta E_c$$

# 1.4. Application à la force de Van der Waals

- Energie potentielle et force
- Dans un Chapitre précédent, on a vu que l'énergie potentielle de Lennard-Jones $E_{pLJ}$ est associée à la force de Van der Waals.
- Rappelons que le potentiel de L-J entre 2 particules A et B s'écrit :

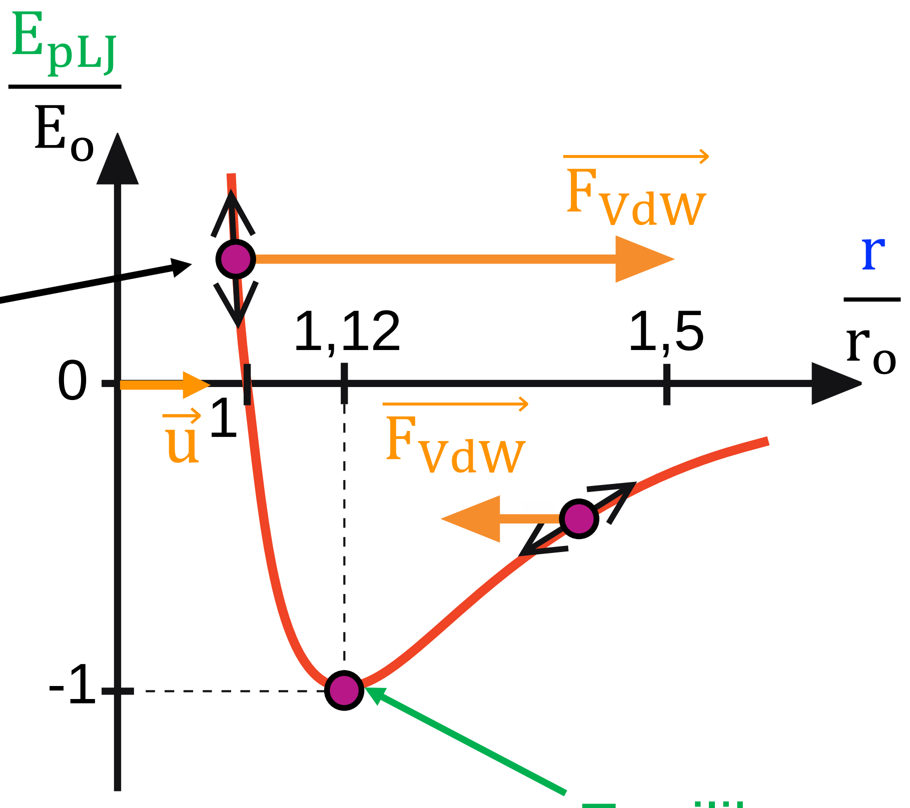
$$E_{pLJ} = 4E_o\left[\left(\frac{r_o}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\right]$$



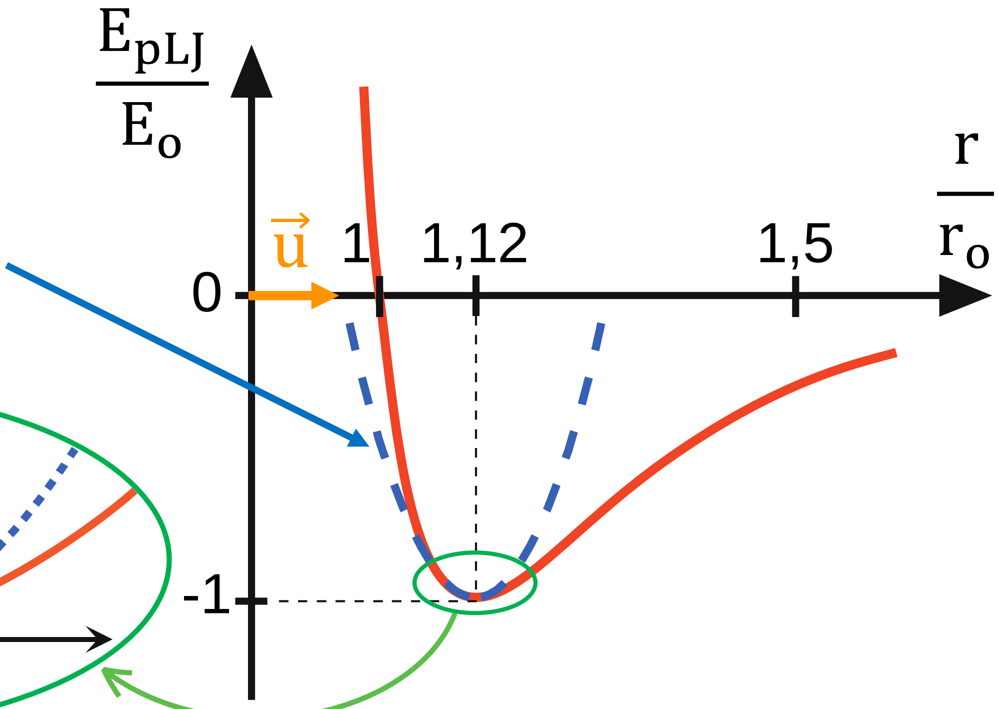

- On peut calculer la force qui dérive de ce potentiel (dépendant de r). Le calcul donne :

$$\overrightarrow{F_{VdW}} = -\left(\frac{dE_{pLJ}(r)}{dr}\vec{u}\right) = \frac{4E_o}{r_o}\left[12\left(\frac{r_o}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{r_o}{r}\right)^{7}\right]\vec{u}$$

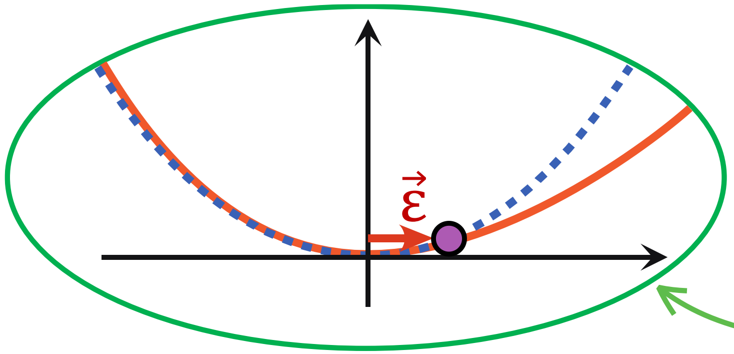
- Cette force $\overrightarrow{F_{VdW}} = \frac{4E_o}{r_o}\left[12\left(\frac{r_o}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{r_o}{r}\right)^{7}\right]\vec{u}$ contient 2 termes :
  - ✓ Une force attractive (dans le sens de $-\vec{u}$) qui varie en $r^{-7}$ et qui domine lorsque $r > r_o$.
  - ✓ Une force répulsive (dans le sens de $\vec{u}$) qui varie en $r^{-13}$ et qui domine lorsque $r < r_o$.
- Dans le puits, la particule subit une force proportionnelle à la dérivée locale du potentiel : par exemple pour $r < r_o$ la dérivée est grande et négative : la force répulsive est grande et suivant $\vec{u}$.
- Pour la position $r = 2^{(1/6)}\, r_o \approx 1{,}12\, r_o$, la dérivée et la force s'annulent : c'est la position d'équilibre.



- On peut montrer mathématiquement (développement limité) que pour une position proche de l'équilibre : $r = (2^{(1/6)}\, r_o) \pm \varepsilon$ (où $\varepsilon$ est un déplacement très petit > 0 ou < 0), la force dépend linéairement de $\varepsilon$.
- L'expression vectorielle de la force est alors : $\overrightarrow{F_{VdW}} \approx -k\,\vec{\varepsilon} = -k\varepsilon\,\vec{u}$ où k est une constante positive (qui dépend de $E_o$ et de $r_o$).
- Graphiquement, cela revient à dire que le fond du puits de potentiel peut être approximé par un potentiel parabolique :




- Au fond du puits, la force de rappel linéaire a la même forme que la force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = -k\,\vec{x}$.



- Conservation de l’énergie et travail de la force de VdW :
- Le résultat précédent indique que la force de VdW est conservative pour de petits déplacements.
- Sans démonstration, on admettra que cette force est toujours conservative (même pour des déplacements grands) :
  - ✓ L’énergie d’une particule dans un potentiel de VdW est constante.
  - ✓ Le travail de la force de VdW est égal à l'opposé de la variation de l’énergie potentielle.

---

- On vient donc de voir 3 exemples de forces conservatives.
- On va présenter un théorème plus général qui s’applique à des systèmes soumis à des forces quelconques : le théorème de l’énergie cinétique.

# 1.5. Théorème de l’énergie cinétique

- Dans les exemples précédents on a obtenu l’égalité : $W = \Delta E_c$
- En pratique ce ne sont que des cas particuliers qui illustrent le ‘Théorème de l’énergie cinétique’ :

- Enoncé
- La variation de l'énergie cinétique d'un système de masse m est égale à la somme des travaux des forces agissant sur ce système :

$$\boxed{\Delta E_c = \sum_F W_F} \qquad [!]$$

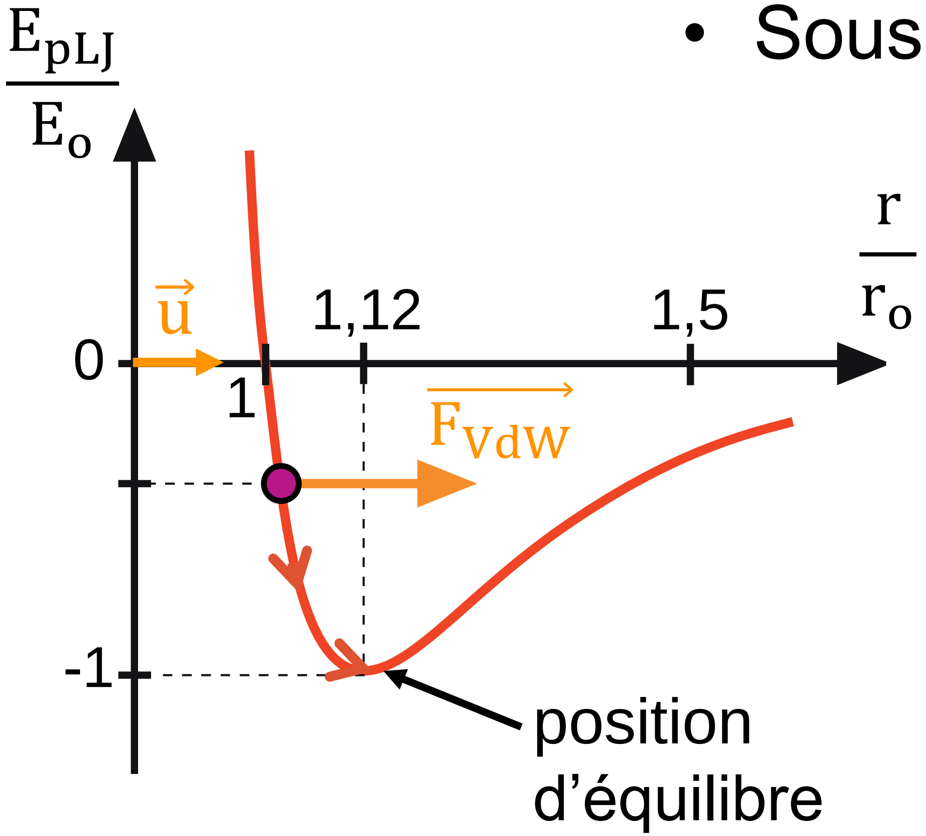
Les conditions d’application de ce Théorème sont les suivantes :

- Conditions d'application
- Ce théorème est applicable dans un « référentiel Galiléen » (cf. Chapitres précédents).
- La masse m du système doit rester constante au cours du mouvement.
- Dans ce Théorème, les forces à prendre en compte sont aussi bien les forces extérieures qu'intérieures au système.

  et il peut s'agir de forces conservatives ou non conservatives !
- On applique généralement ce Théorème lorsque le système (macroscopique ou microscopique) se déplace d'un point A vers un point B, et on peut écrire :

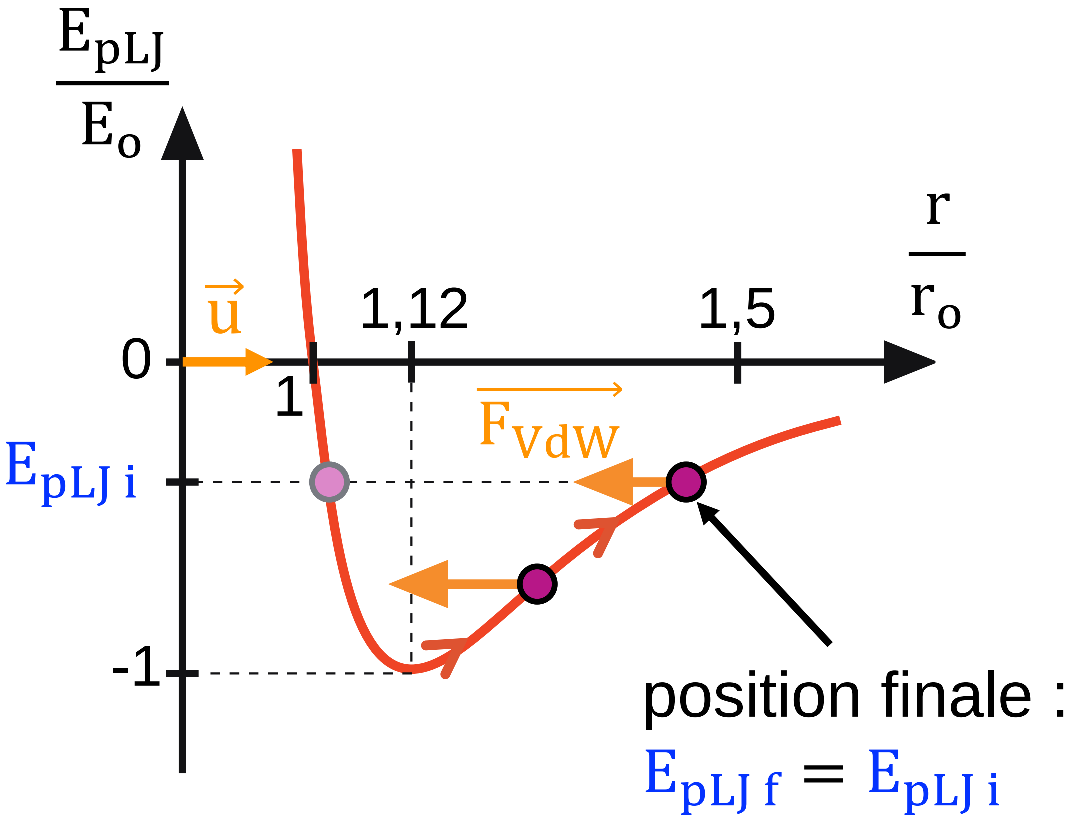
$$\Delta E_{c\,AB} = E_{c\,B} - E_{c\,A} = \sum_{A \to B} W_{F_{ext+int}}$$

- Exemple d'application qualitatif
- On considère une particule dans un potentiel de Van der Waals.
- Lorsque cette particule n'est pas au fond du puits de potentiel (par exemple pour $r < 1{,}12\ r_o$), elle subit une force $\overrightarrow{F_{VdW}}$ :




- Sous l'effet de cette force (suivant $\vec{u}$) la particule :
  - se déplace vers la droite,
  - gagne de l'énergie cinétique,
  - perd de l'énergie potentielle,
  - passe par la position d'équilibre où sa vitesse est maximale,
  - et remonte de l'autre côté du puits.

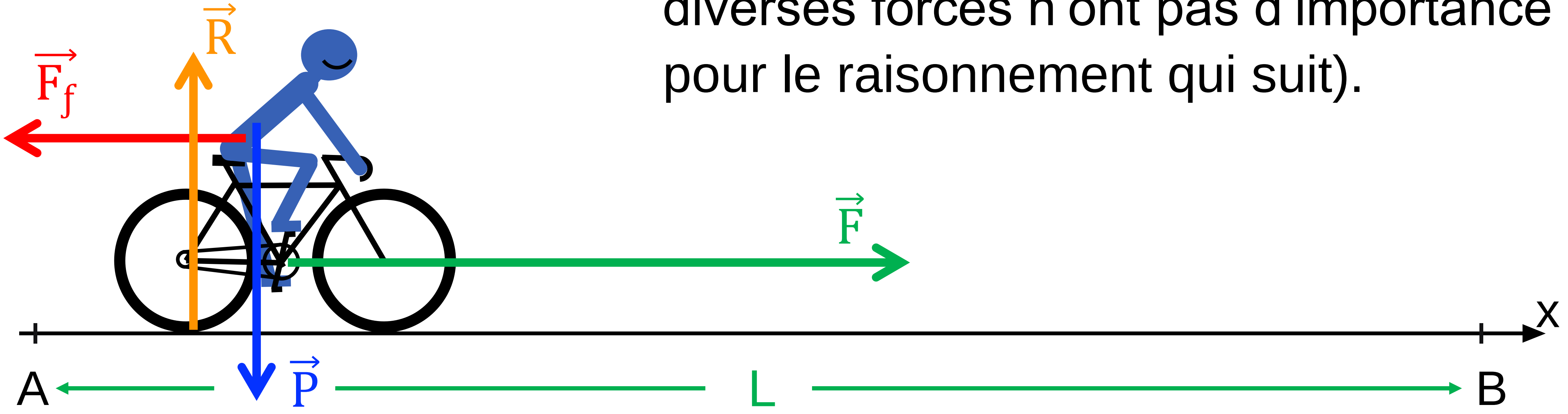
- En remontant le puits de potentiel, la particule :
  - subit une force en sens contraire (suivant $-\vec{u}$),
  - perd de l'énergie cinétique,
  - regagne de l'énergie potentielle,
  - et atteint une position finale où sa vitesse est nulle et son énergie potentielle est égale à l'énergie potentielle initiale.




- Ensuite, la particule repart vers la gauche : le mouvement est périodique (et permanent) :
- La force de VdW étant conservative, l'énergie mécanique du système est constante.

- Exemple d'application quantitatif
- On reprend l'exemple du cycliste. Ici, le cycliste part d'un point A avec une vitesse nulle, et atteint une vitesse $v_B$ sur une distance horizontale $\|\overrightarrow{AB}\| = L$.
- <u>Hypothèses</u>
- On a vu qu'il existe une force de frottements $\overrightarrow{F_f}$ (air, sol, mécanique du vélo, …) supposée ici constante pour simplifier :

- Les autres forces qui s'appliquent au système sont :
  - Son poids : $\vec{P}$
  - La réaction du sol : $\vec{R}$
  - Et bien sûr la force de poussée du cycliste, que l'on supposera également constante : $\vec{F}$




- (NB : les points d'application de ces diverses forces n'ont pas d'importance pour le raisonnement qui suit).

- Exprimons le Théorème de l’énergie cinétique :

$$\Delta E_{c\,AB} = E_{c\,B} - E_{c\,A} = \sum_{A \to B} W_{F_{ext+int}}$$

- La variation de l’énergie cinétique est : $\Delta E_{c\,AB} = \frac{1}{2} m\, v_B^2 - 0$

- Le travail des diverses forces s’écrit :

$W_{\vec{P}} = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = 0$ (car les vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires)

$W_{\vec{R}} = \vec{R}.\overrightarrow{AB} = 0$ (car les vecteurs $\vec{R}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires)

$W_{\overrightarrow{F_f}} = \overrightarrow{F_f}.\overrightarrow{AB} = -F_f.L$ (car les vecteurs $\overrightarrow{F_f}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont en sens opposé)

$W_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.L$ (car les vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont dans le même sens)

- Finalement, on obtient : $\frac{1}{2} m\, v_B^2 = (F - F_f) L$
- Application Numérique :
- Supposons que m = 64 kg ; $v_B$ = 27 km/h = 7,5 m/s ; et L = 50 m.

  Et supposons que $F_f$ = 10 N.
- On obtient : $F = \frac{m\, v_B^2}{2\, L} + F_f = \frac{64\ \text{kg} \times (7{,}5\ \text{m/s})^2}{2 \times 50\ \text{m}} + 10\ \text{N} = 46\ \text{N}$
- Autres caractéristiques de ce mouvement :
- L'énergie totale fournie (ou travail) de A à B par le cycliste (pour vaincre les frottements et acquérir de l'énergie cinétique) est :

$$W_{\vec{F}} = F.L = 46\ \text{N} \times 50\ \text{m} = 2300\ \text{J}$$

- Sur la force totale (46 N), seulement ≈ 78% (36 N sur 46 N) a vraiment permis de gagner de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m\, v_B^2$ = 1800 J.
- Et le reste (10 N sur 46 N ≈ 22%), a été dégradé en chaleur Q par l'intermédiaire des forces de frottements : Q = 500 J.
- La puissance fournie par le cycliste n'est pas constante. En effet, on a vu dans un Chapitre précédent que la puissance instantanée développée par une force s'écrit : $P = \vec{F}.\vec{v}$.
- Au point A, la puissance est nulle ($v_A$ = 0)...

  puis la puissance augmente jusqu'au point B, où elle vaut :

$$P = \vec{F}.\overrightarrow{v_B} = F.\,v_B$$
$$= 46\ \text{N} \times 7{,}5\ \text{m/s} = 345\ \text{Watt}$$

# Conclusion

- Dans ce Chapitre, on a vu
  – Les caractéristiques des forces conservatives.
- Et on les a illustrées avec trois exemples :
  – Le poids,
  – La force de rappel d’un ressort,
  – Et la force de Van der Waals
- Enfin, on a présenté
  – Le Théorème de l’énergie cinétique.
- Dans le Chapitre suivant, on va étudier un
  – Mouvement oscillatoire harmonique.

# Mentions légales