Physique

Chapitre 8

Mouvement harmonique

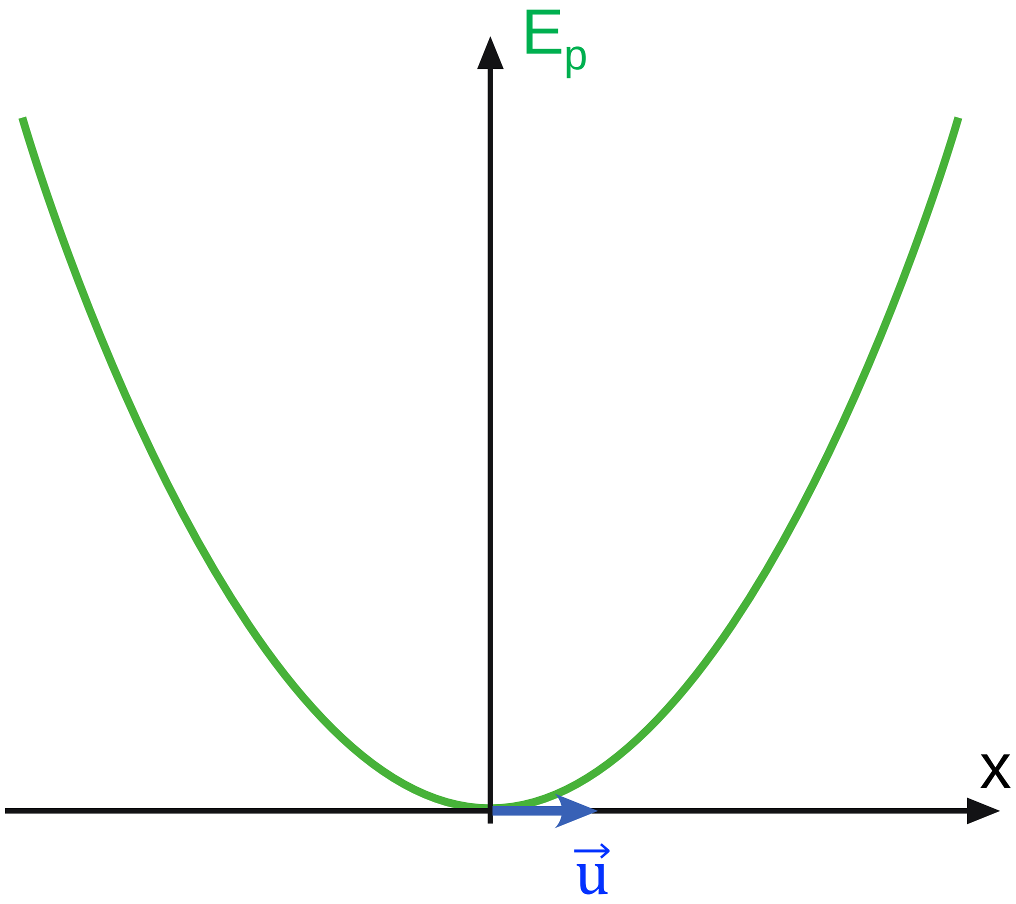
Dr. Benoît CHABAUD

Objectifs

- Dans ce Chapitre, on va :
  - Rappeler l'expression du potentiel harmonique
  - Ecrire et résoudre l'équation du mouvement
- Puis on va appliquer ces équations à quelques systèmes déjà étudiés :
  - Masse fixée à un ressort
  - Pendule oscillant
  - Particule dans un potentiel de Lennard-Jones
- Enfin, on présentera des
  - Changements de variables trigonométriques

1.1. Mouvement harmonique

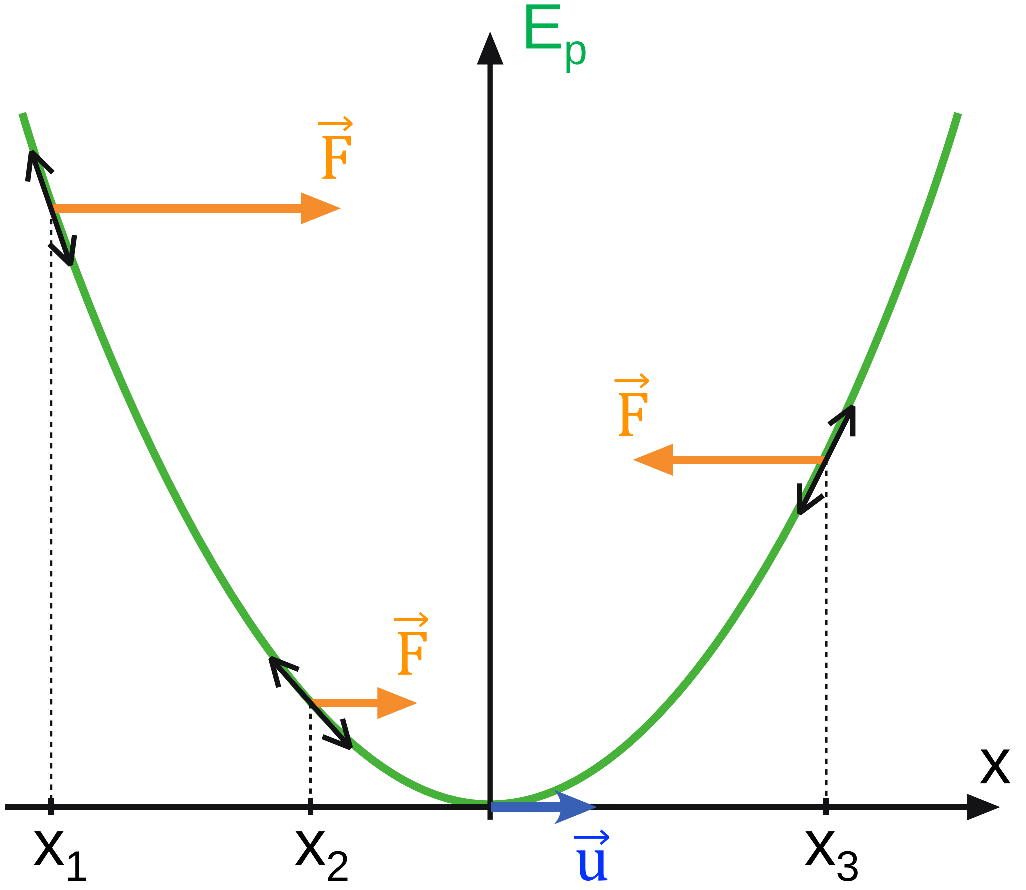
- Définition
- On parle de mouvement harmonique pour un système qui évolue dans un potentiel parabolique, de la forme : $E_p = \frac{1}{2} A x^2$
- Où A est une constante positive (la dimension de la constante A est : $[A] = [E_p] / [x^2] = J \cdot m^{-2}$)
- On traitera seulement le cas unidimensionnel, où $x = x(t)$ est l'unique variable d'espace.



- Forces
- La force qui dérive de ce potentiel s'écrit : $\vec{F} = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\vec{u} = -A\,x\,\vec{u}$
- Comme toute force conservative, cette force tend à ramener le système vers le minimum du puits de potentiel :

  - Si x < 0 alors $-Ax > 0$ et la force est suivant $\vec{u}$

  - Si x > 0 alors $-Ax < 0$ et la force est suivant $-\vec{u}$

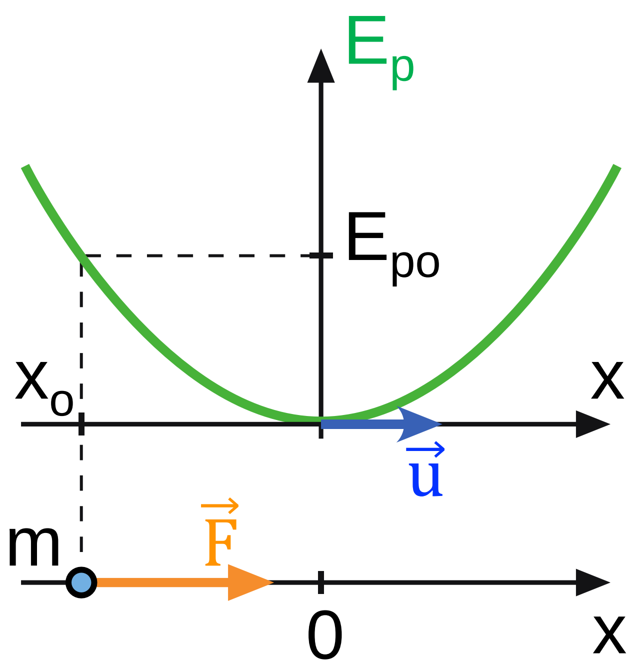


- Dans les exemples qui suivront, le poids du système n'interviendra pas (il sera soit négligeable, soit sera compensé par la réaction du support)

- Equation générale
- Appliquons la Relation Fondamentale de la Dynamique à ce système :

$$\vec{F} = -A\,x\,\vec{u} = m\,\vec{a}$$

  - où m est la masse du système,
  - et $\vec{a}$ est son accélération.



- Autrement dit, on peut écrire : $-A\,x\,\vec{u} = m\,\ddot{x}\,\vec{u}$

  où $\ddot{x} = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)$ est l'accélération du système ($\ddot{x}$ peut être ≥ 0 ou < 0).

- En projetant sur l'axe Ox, on obtient : $\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{A}{m}\,x(t) = 0}$ [!]

- $\ddot{x}(t) + (A/m)\,x(t) = 0$ est une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et sans second membre.
- On va résoudre cette équation et on appliquera ensuite la solution à quelques mouvements harmoniques.
- Résolution mathématique
- On cherche une fonction x(t) dont la dérivée seconde est égale à la fonction x(t) elle-même, multipliée par une constante négative :

$$\ddot{x}(t) = -(A/m)\,x(t)$$

- La solution est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{x(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{A}{m}}\,t\right)} \qquad [!]$$

- Constantes d'intégration
- La solution d'une équation différentielle du second ordre comporte deux constantes d'intégration, et on écrit :

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{A}{m}}\, t + C_2\right)$$

- On peut vérifier que cette solution générale vérifie l'équation $\ddot{x}(t) + \frac{A}{m}\, x(t) = 0$ quelles que soient les constantes C_1 et C_2.
- C_1 est l'amplitude du mouvement et C_2 est la phase à l'origine.
- Nous allons discuter du sens physique de cette solution et des constantes C_1 et C_2.
- Mais avant cela, on va donner d'autres expressions de la solution périodique x(t).

- Expressions équivalentes
- On peut vérifier que la solution de l'équation peut aussi s'écrire sous la forme d'un sinus :

$$x(t) = C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{A}{m}}\, t + C_4\right)$$

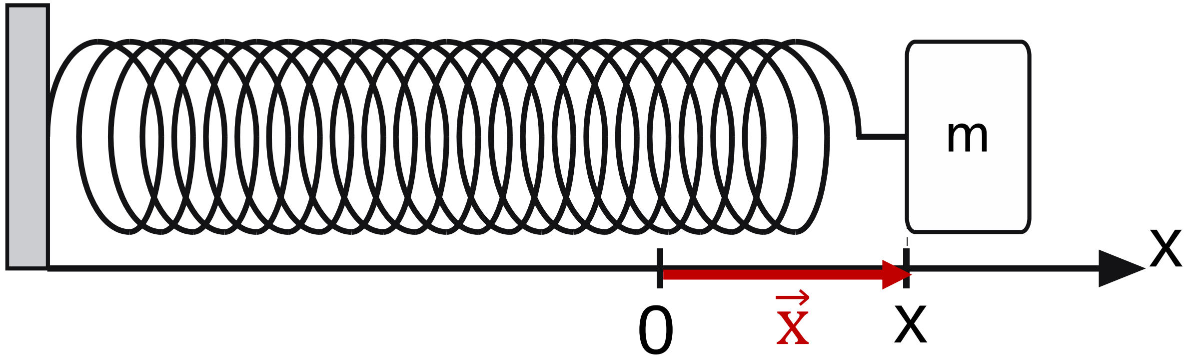
- On verra plus loin comment passer du cosinus au sinus.
- Enfin, on peut également vérifier que l'expression suivante vérifie aussi l'équation :

$$x(t) = C_5 \cos\left(\sqrt{\frac{A}{m}}\, t\right) + C_6 \sin\left(\sqrt{\frac{A}{m}}\, t\right)$$

- On verra à la fin du Chapitre comment établir les relations entre les constantes C_1 à C_6.

1.2. Oscillation d'une masse fixée à un ressort

- Le système est constitué d'un ressort (de raideur k) auquel est fixée une masse m qui peut glisser horizontalement sans frottements :



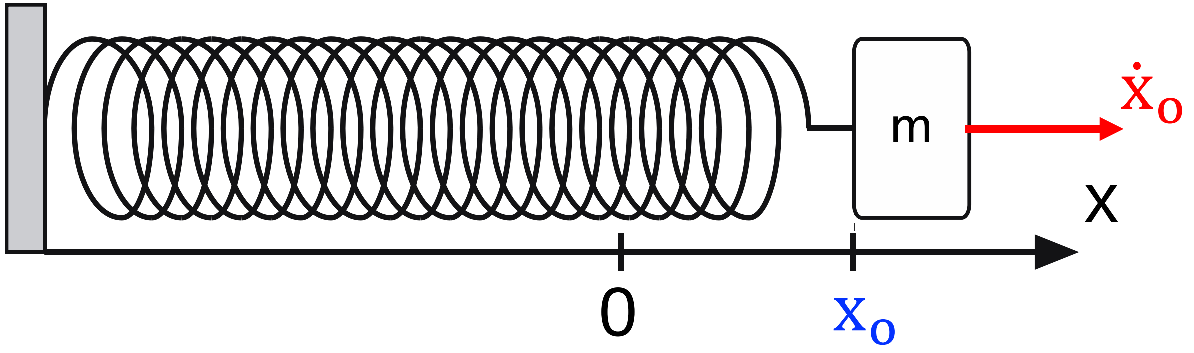
- La force appliquée à la masse m est : $\vec{F} = -k\,x\,\vec{u} = -k\,\vec{x}$
- Et l'énergie potentielle du système est : $E_p = \frac{1}{2} k\,x^2$
- (on a vu que la constante de raideur d'un ressort a la dimension :

$[k] = [E_p] / [x^2] = [F] / [x] = J\ .\ m^{-2} = N\ .\ m^{-1}$)

- <u>L'équation du mouvement est</u> : $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\, x(t) = 0$
- La solution de cette équation s'écrit : $x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2\right)$

  (et la vitesse s'écrit : $\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2\right)$)

- Les constantes d'intégration dépendent des conditions initiales sur le mouvement qui sont : $x(t=0) = x_o$ et $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_o$



- (NB : sur cette figure, on a représenté : $x_o > 0$ et $\dot{x}_o > 0$. Mais on pourrait avoir n'importe quelles autres conditions initiales).

- On applique les conditions initiales :

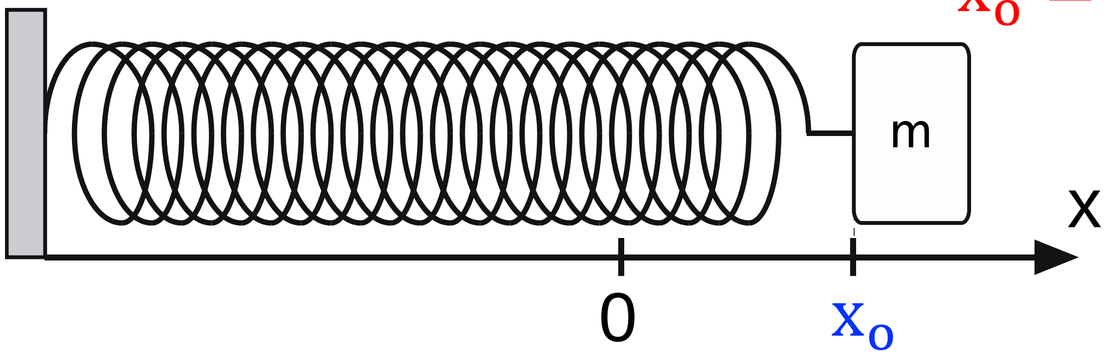
$$\begin{cases} x(t=0) = C_1 \cos(0 + C_2) = x_o & [1] \\ \dot{x}(t=0) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(0 + C_2) = \dot{x}_o & [2] \end{cases}$$

- C'est un système de 2 équations à 2 inconnues que l'on peut résoudre par exemple, en formant le rapport terme à terme :

$\frac{[2]}{[1]} \rightarrow \quad \tan(C_2) = -\frac{\dot{x}_o}{x_o}\sqrt{\frac{m}{k}}$ et dans [1] $\rightarrow$ $C_1 = \dfrac{x_o}{\cos\left[\mathrm{Arc\,tan}\left(-\frac{\dot{x}_o}{x_o}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)\right]}$

- <u>Situation simple</u> :
- Supposons que la masse est lâchée avec une vitesse nulle depuis la position $x_o > 0$:

$\dot{x}_o = 0$



- On calcule les constantes d'intégration avec les équations [1] et [2] : $\begin{cases} C_1 = x_o \\ C_2 = 0 \end{cases}$
- L'équation du mouvement s'écrit alors : $x(t) = x_o \cos\left(\sqrt{k/m}\ t\right)$

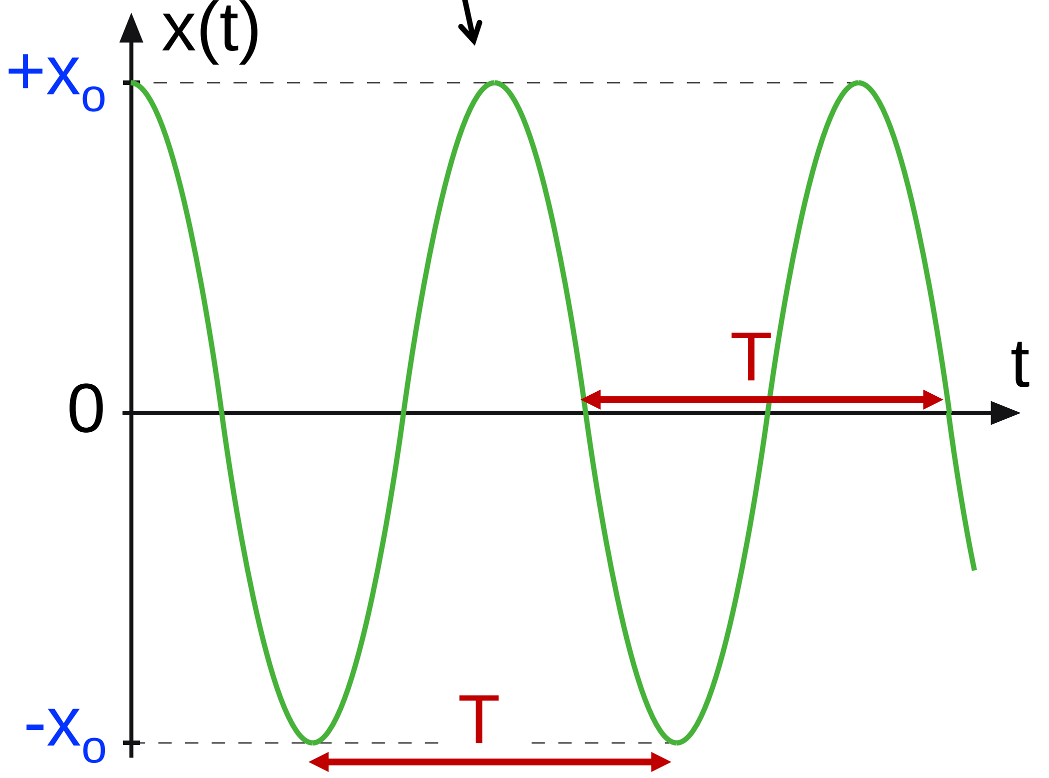
  (et la vitesse : $\dot{x}(t) = -x_o\sqrt{k/m}\ \sin\left(\sqrt{k/m}\ t\right)$)
- L'amplitude du mouvement est x_o :

  la position x(t) oscille entre $+x_o$ et $-x_o$
- La pulsation du mouvement est :

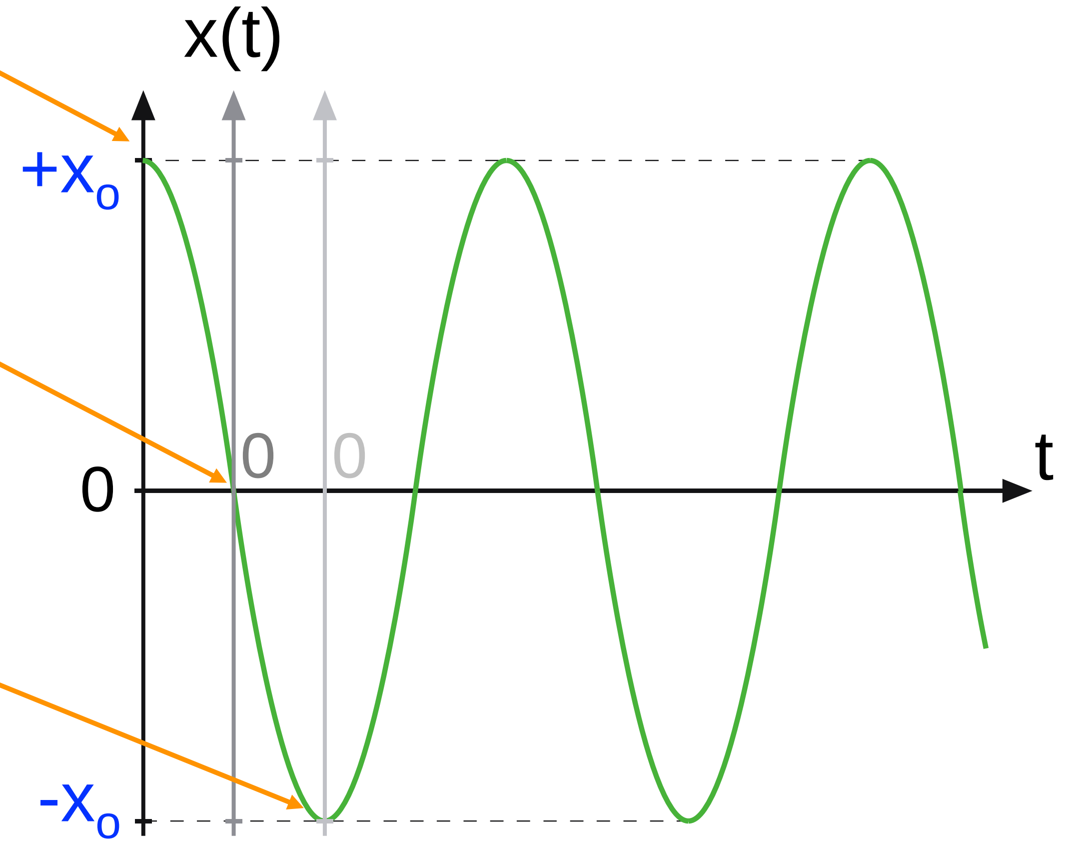
  $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (ω en rad/s)

  où f est la fréquence (en Hz)

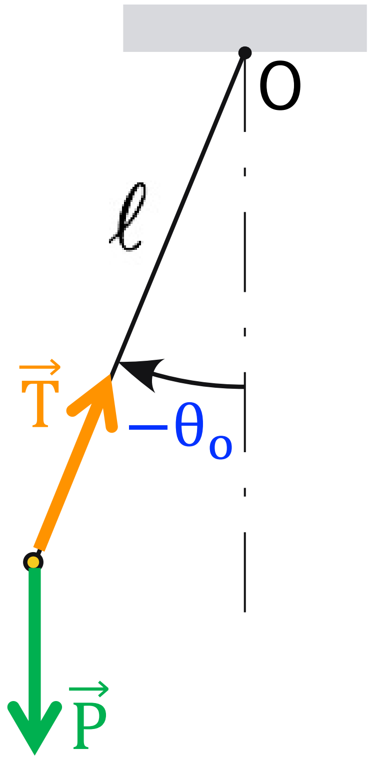
  et T est la période (en s).
- La période s'écrit : $T = 2\pi\sqrt{m/k}$



- Phase à l'origine : C_2 :
- C_2 est simplement liée au choix de l'instant de départ du mouvement.
- Avec une vitesse initiale nulle et une position initiale $x_o > 0$, on a obtenu : $x(t) = x_o \cos(\omega t + 0)$
- Si on choisissait t = 0 lorsque la masse passe par la position x = 0, on aurait : $x(t) = x_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
- Si on choisissait t = 0 lorsque la masse passe par la position $x = -x_o$, on aurait : $x(t) = x_o \cos(\omega t + \pi)$
- Le mouvement est identique, mais la phase à l'origine est différente.



1.3. Oscillation d'un pendule



- Dans un précédent Chapitre, on a étudié le mouvement d'un pendule de longueur ℓ, et on a montré que si l'angle θ(t) est petit, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\theta = 0$$

- C'est la même équation Mathématique, dont la solution s'écrit :

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + C_2\right)$$

(et la vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t) = -C_1\sqrt{g/\ell}\,\sin\left(\sqrt{g/\ell}\,t + C_2\right)$)

- C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions initiales.

- Situation simple : supposons que la masse est lâchée avec une vitesse nulle depuis la position $-\theta_o < 0$ (comme sur le dessin).

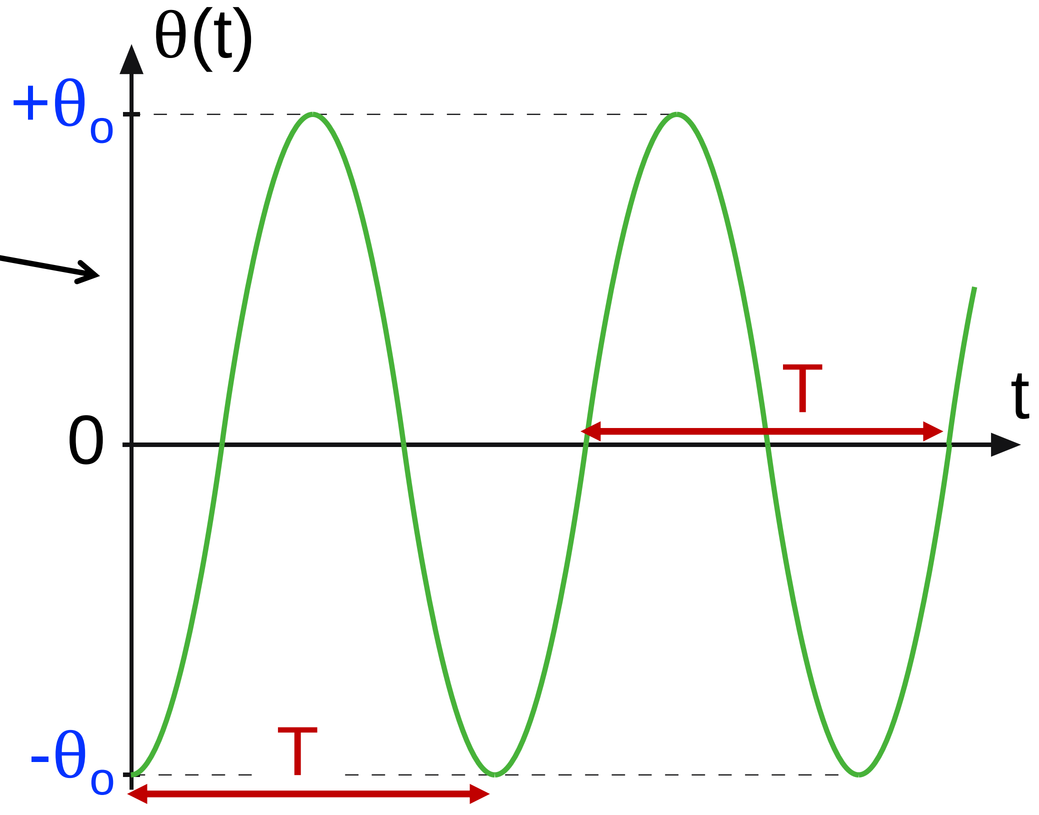
- On calcule les constantes d'intégration : $\begin{cases} \theta(t=0) = -\theta_o \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\theta_o \\ C_2 = 0 \end{cases}$

- L'équation du mouvement est :

$$\theta(t) = -\theta_o \cos\left(\sqrt{g/\ell}\ t\right)$$

(et la vitesse angulaire s'écrit :

$$\dot{\theta}(t) = \theta_o \sqrt{g/\ell}\ \sin\left(\sqrt{g/\ell}\ t\right))$$



- L'amplitude du mouvement est θ_o : l'angle $\theta(t)$ oscille entre $-\theta_o$ et $+\theta_o$

- La pulsation du mouvement est : $\omega = \sqrt{g/\ell} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (ω en rad/s)

  où f est la fréquence (en Hz)

  et T est la période (en s).

- Dans ce mouvement, on voit que la période $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}$
  - est d'autant plus grande que la longueur ℓ du pendule est grande,
  - (est d'autant plus petite que l'accélération de la pesanteur est grande).

- Par contre, la période T des oscillations ne dépend pas de la masse m.

- Pour mémoire, ce qui précède est valable lorsque l'angle θ est petit, c'est à dire quand : $\sin(\theta) \approx \theta$ (avec θ exprimé en radians).

  Par exemple : sin (0,1 rad) = 0,0998 ≈ 0,1 à 2‰ près.

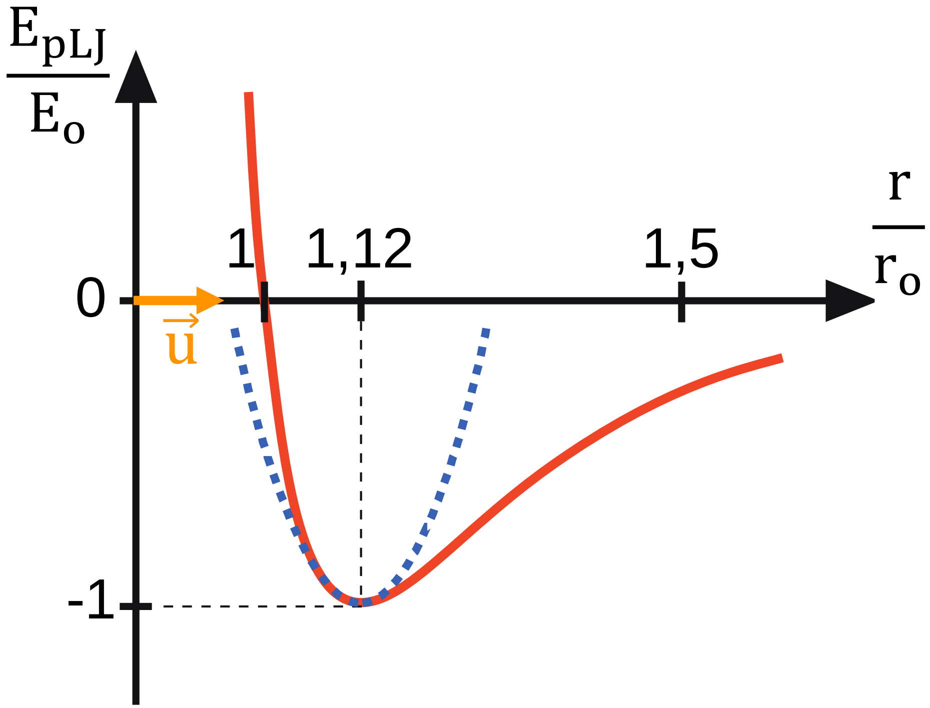
1.4. Potentiel de Van des Waals

- Dans un précédent Chapitre, on a vu que le fond du puits de potentiel de Lennard-Jones peut être approximé par une parabole.
- Au fond du puits (pour un déplacement ε petit) la force de rappel de VdW qui s'exerce sur une particule est de la forme : $\overrightarrow{F_{VdW}} \approx -k\,\vec{\varepsilon}$
- En appliquant la RFD, on voit que le mouvement de la particule suit l'équation :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \frac{k}{m}\varepsilon(t) = 0$$

- Et la solution s'écrit :

$$\varepsilon(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\right)$$

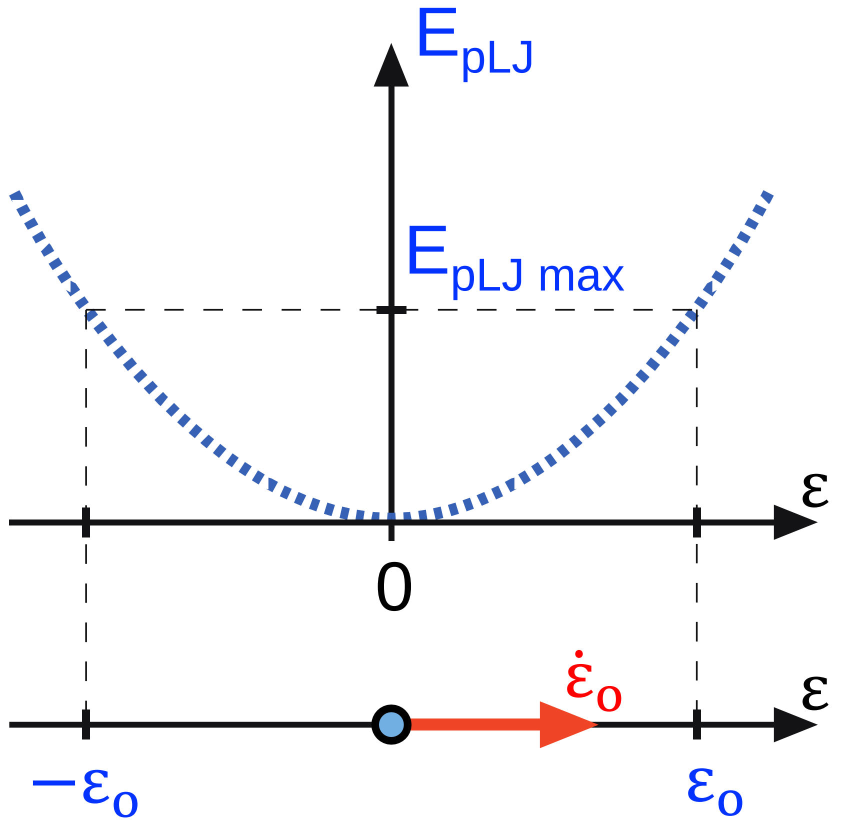


- Conditions initiales : supposons qu'à l'instant initial, la particule passe par la position $\varepsilon = 0$ avec une vitesse $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_o$

- On détermine les constantes C_1 et C_2 en écrivant ces conditions initiales :

$$\varepsilon(t=0) = C_1 \cos(0 + C_2) = 0 \text{ et}$$

$$\dot{\varepsilon}(t=0) = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(0 + C_2) = \dot{\varepsilon}_o$$



- D'où $C_2 = \pi/2$ et $C_1 = -\dot{\varepsilon}_o\sqrt{\frac{m}{k}}$

- Finalement la position de la particule est :

$$\varepsilon(t) = -\dot{\varepsilon}_o\sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(et la vitesse : } \dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_o \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)\text{)}$$

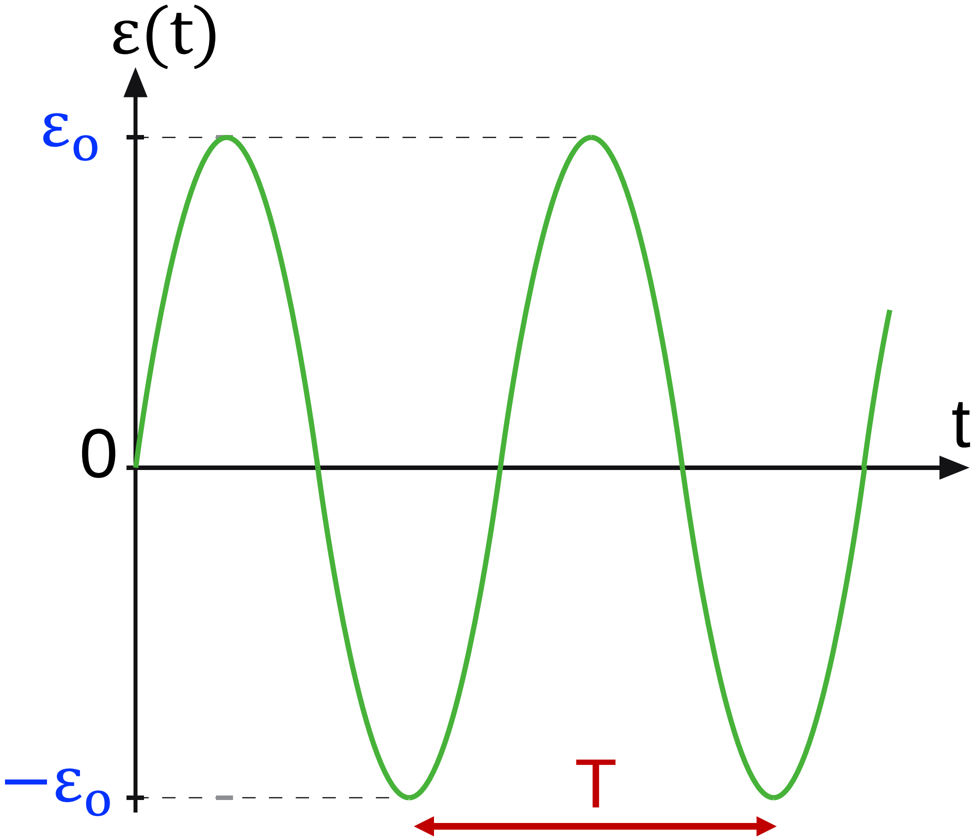
- La représentation du mouvement : $\varepsilon(t) = -\dot{\varepsilon}_o \sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)$ est donnée ci-dessous :

- L'amplitude du mouvement est : $\varepsilon_o = \dot{\varepsilon}_o \sqrt{\frac{m}{k}}$ (on retrouvera cette expression avec les énergies).

- La position oscille entre $+\varepsilon_o$ et $-\varepsilon_o$

- La pulsation du mouvement est :
  $\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (ω en rad/s)

  où f est la fréquence (en Hz)
  et T est la période (en s).



1.5. Energies d’un mouvement harmonique

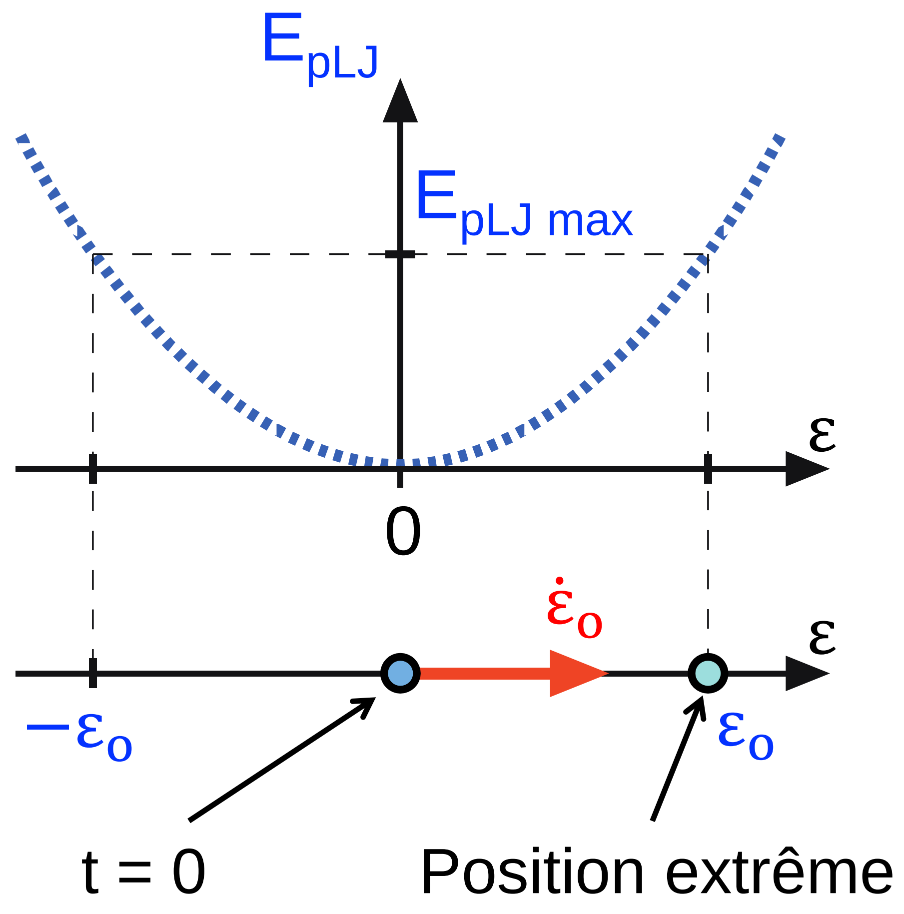
- Les raisonnements qui suivent s’appliquent aux mouvements d’une particule dans un potentiel parabolique, mais il sont applicables à tous les mouvements harmoniques.

- <u>Amplitude du mouvement</u> : on a obtenu l’expression $\varepsilon_o = \dot{\varepsilon}_o\sqrt{m/k}$ par le calcul. On va retrouver cette expression en écrivant la conservation de l’énergie :

- A t = 0, l’énergie du système est :

$$E_{tot} = E_{pLJ}(t = 0) + E_{cin}(t = 0)$$

Soit : $E_{tot} = 0 + \frac{1}{2}\, m\dot{\varepsilon}_o^2$



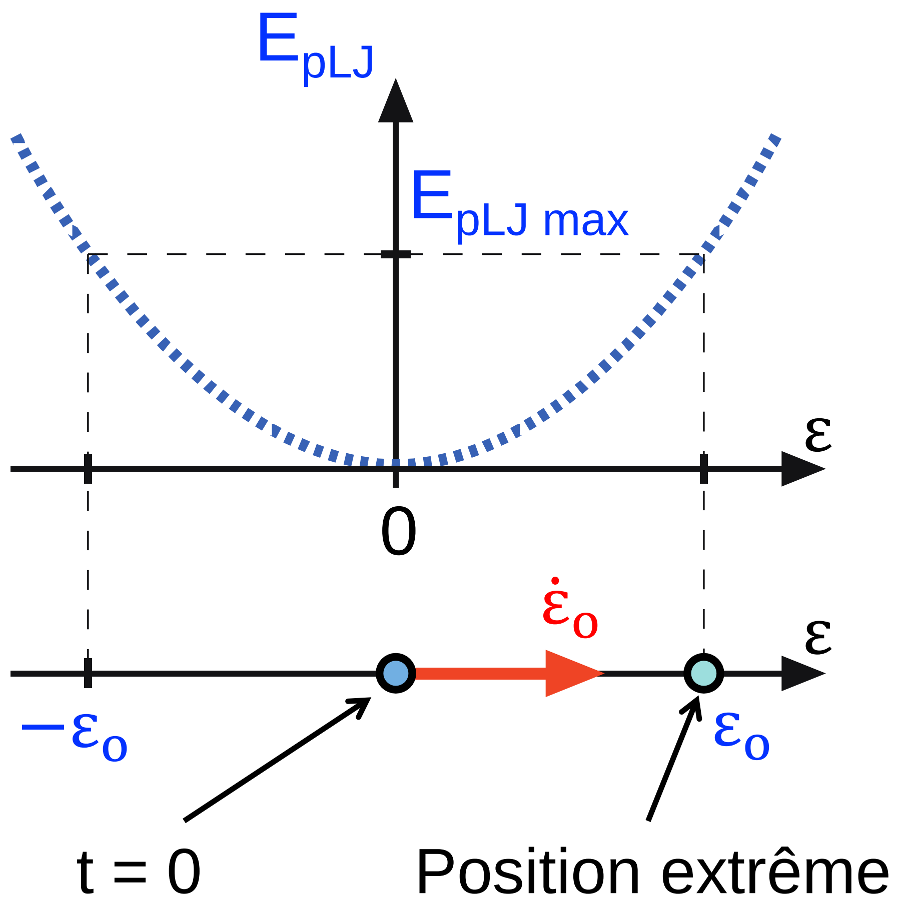
- En arrivant à la position ε_o (la plus éloignée de l'équilibre), la vitesse de la particule s'annule et l'énergie est : $E_{tot} = E_{pLJ\,max} + 0$

- Soit : $E_{tot} = \frac{1}{2} k\, \varepsilon_o^2 + 0$ (énergie potentielle quadratique).

- En égalant ces énergies, on a :

$$\frac{1}{2}\, m\dot{\varepsilon}_o^2 = \frac{1}{2} k\, \varepsilon_o^2 \quad \text{soit : } |\varepsilon_o| = |\dot{\varepsilon}_o|\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Dans notre exemple, à t = 0 on a : $|\dot{\varepsilon}_o| = \dot{\varepsilon}_o > 0$ et $|\varepsilon_o| = \varepsilon_o > 0$, et on retrouve l'amplitude du mouvement oscillatoire : $\varepsilon_o = \dot{\varepsilon}_o \sqrt{m/k}$



- Expression des énergies : plus généralement, on peut écrire les énergies de la particule en fonction du temps :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2}\, m \left[\dot{\varepsilon}_o \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2 \text{ et}$$

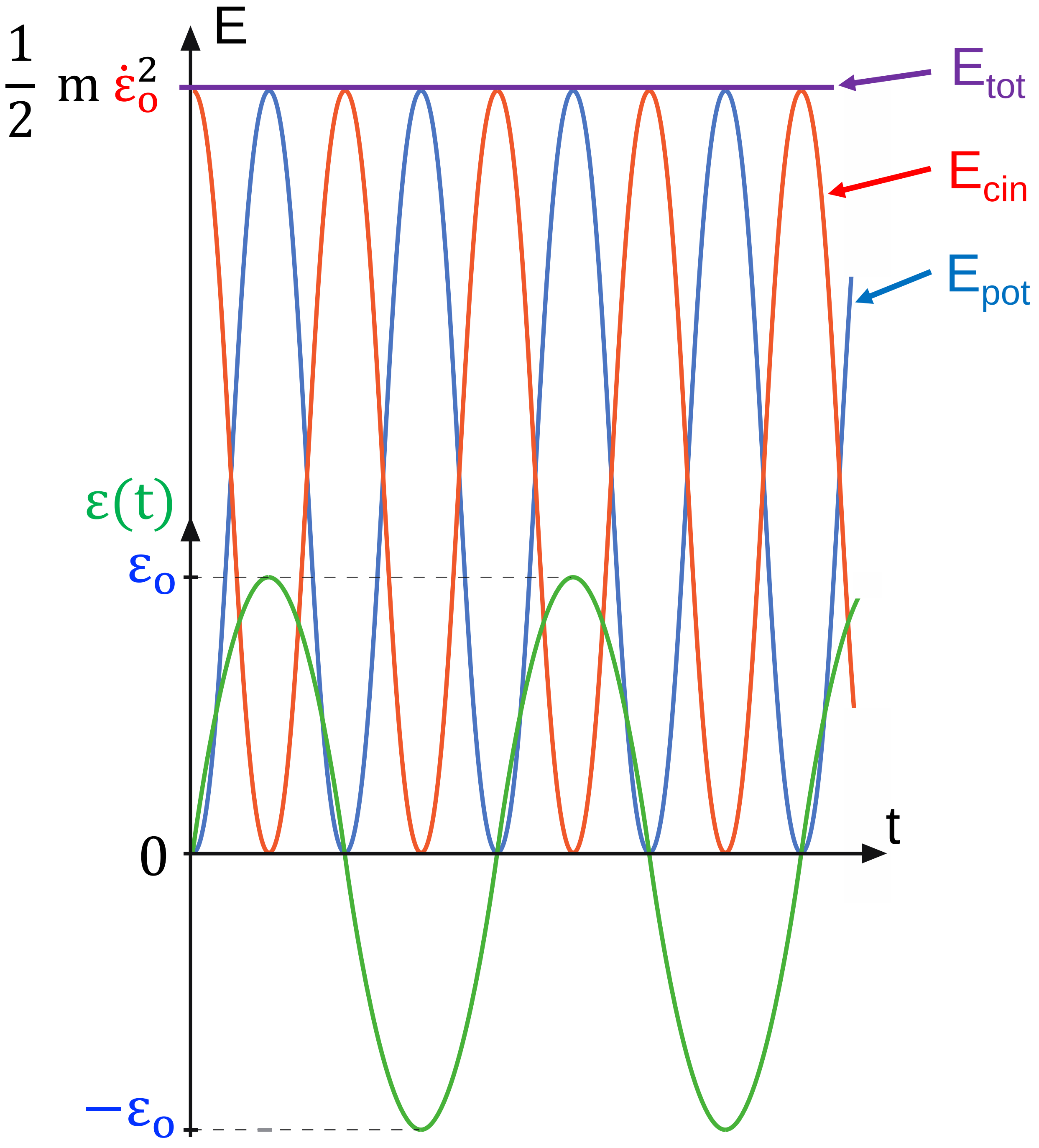
$$E_{pot} = \frac{1}{2}\, k\, \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\, k \left[-\dot{\varepsilon}_o \sqrt{\frac{m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)\right]^2$$

- En formant alors $E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}$, on obtient :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\varepsilon}_o^2 \left[\left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2\right]$$

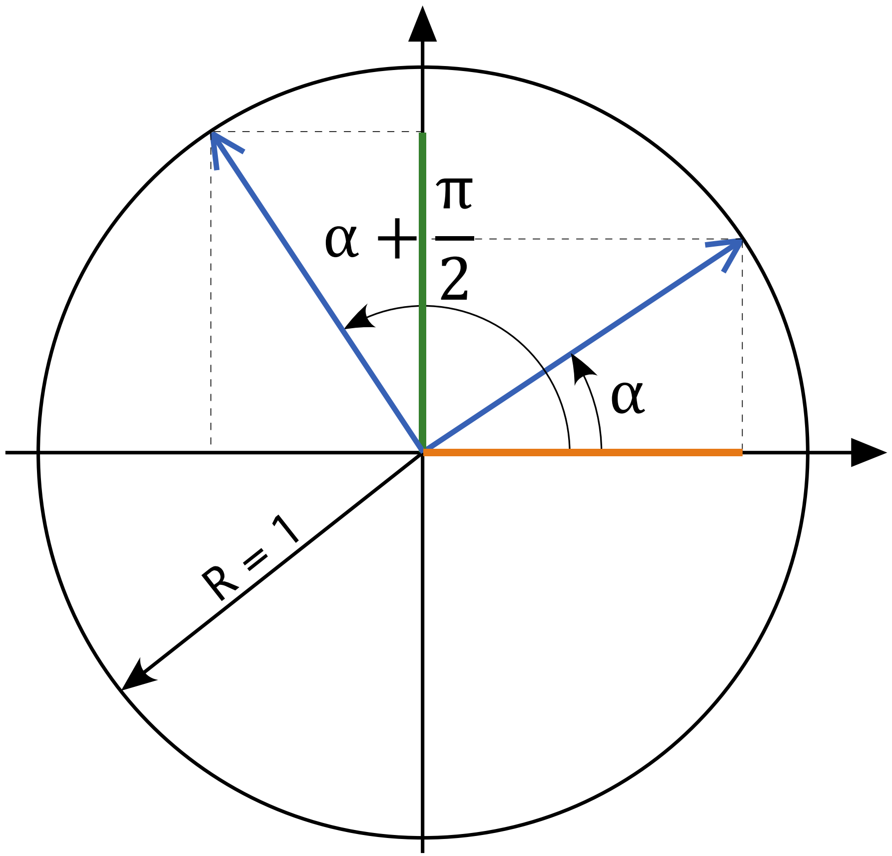
- Soit : $E_{tot} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\varepsilon}_o^2 = \text{constante}$.

- La représentation graphique superposée du mouvement et des énergies est la suivante :
- L'énergie cinétique est maximale lorsque la particule passe par la position $\varepsilon = 0$
- L'énergie potentielle est maximale lorsque la particule passe par l'une des positions extrêmes : $\varepsilon = \pm\varepsilon_o$
- L'énergie totale est constante.



1.6. Expressions d'un mouvement sinusoïdal

- Pour un mouvement harmonique : $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$, on a vu que la solution s'écrit : $x(t) = C_1 \cos(\omega t + C_2)$



- Passage du cosinus au sinus : à partir du cercle trigonométrique, on voit que pour tout angle α :

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

- L'expression ci-dessus peut donc s'écrire :

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t + C_2) = C_1 \sin\left(\omega t + C_2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Le passage du cosinus au sinus revient à un changement de la phase à l'origine.

- Expression sous forme de somme : dans un Chapitre précédent, on a démontré la relation : $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

- Cette relation nous permet de transformer l'expression :
  $x(t) = C_1 \cos(\omega t + C_2)$ en une somme de 2 termes. On écrit :
  $x(t) = C_1 \left[\cos(\omega t)\cos(C_2) - \sin(\omega t)\sin(C_2)\right]$

- On peut alors définir deux variables : $C_5 = C_1 \cos(C_2)$ et $C_6 = C_1 \sin(C_2)$ et écrire : $x(t) = C_5 \cos(\omega t) - C_6 \sin(\omega t)$

- Les variables : C_5 et C_6 vérifient :
  $\frac{C_6}{C_5} = \mathrm{tg}(C_2)$ et $C_5{}^2 + C_6{}^2 = C_1{}^2$ (ou : $C_1 = \sqrt{C_5{}^2 + C_6{}^2}$)

- On peut donc transformer une fonction cosinus en une somme d'un sinus et d'un cosinus.

Conclusion

- Dans ce Chapitre, on a vu :
  - L'expression générale d'un potentiel harmonique
  - Et on a résolu l'équation du mouvement
- On a appliqué cette équation à quelques systèmes connus :
  - Masse fixée à un ressort
  - Pendule oscillant
  - Particule dans un potentiel de Lennard-Jones
- Et enfin, on a présenté différentes solutions des
  - Equations des mouvements oscillants

Conclusion du Cours de Physique 1 - Mécanique

- Nous avons étudié la Mécanique du point matériel et présenté les concepts de :
  - Système, repère, trajectoire
  - Position, vitesse, accélération
  - Forces conservatives et non conservatives
  - Énergie et puissance
  - Mouvement harmonique
- Dans le Cours de Physique 2, vous aborderez l’électricité et l’optique

Mentions légales