

Chapitre 16

Test paramétrique de comparaison d'une moyenne estimée à une valeur théorique de référence

José LABARERE, PU-PH

Arnaud Seigneurin, MCU-PH, Bastien Boussat, MCU-PH, Alexandre Bellier, AHU, Patrice François, PU-PH

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l'écart réduit
- Test t de Student

Objectifs

Comparaison d'une moyenne estimée à partir d'un échantillon à une valeur théorique de référence :

- Identifier une situation requérant ce type de test (test Z écart-réduit ou t de Student)
- Formuler les hypothèses (nulle et alternative)
- Connaitre et vérifier les conditions d'application de ce test
- Interpréter le résultat du test

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l'écart réduit
- Test t de Student

Comparaison d'une moyenne estimée à une valeur théorique de référence

Comparer une moyenne estimée (m) à partir d'un échantillon issu d'une population de moyenne inconnue (μ) à une moyenne théorique connue (μ_{H0}) d'une population de référence



1. Formulation des hypothèses

$$H_0 : \mu = \mu_{H0}$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_{H0}$$

Comparaison d'une moyenne estimée à une valeur théorique de référence



1. Formulation des hypothèses

$$H_0 : \mu = \mu_{H0}$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_{H0}$$

2. Risque $\alpha = 0.05$ (5%) – a priori

3. Choix du test

Test Z de l'écart réduit ($n \geq 30$)

Test t de Student (n , distribution normale)

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l'écart réduit
- Test t de Student

Test Z de l'écart réduit



$$m \approx \mu$$

(fluctuations d'échantillonnage)

Sous H_0 : $\mu = \mu_{H0} \rightarrow \mu - \mu_{H0} = 0$

Si $n \geq 30$: $m \rightarrow N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Rappel : La moyenne m d'une variable quantitative X calculée sur un échantillon d'effectif n est elle-même une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, quelle que soit la loi de distribution de la variable X si l'effectif de l'échantillon $n \geq 30$ (Chapitre 11, Théorème central limite)

Test Z de l'écart réduit



$$m \approx \mu$$

(fluctuations d'échantillonnage)

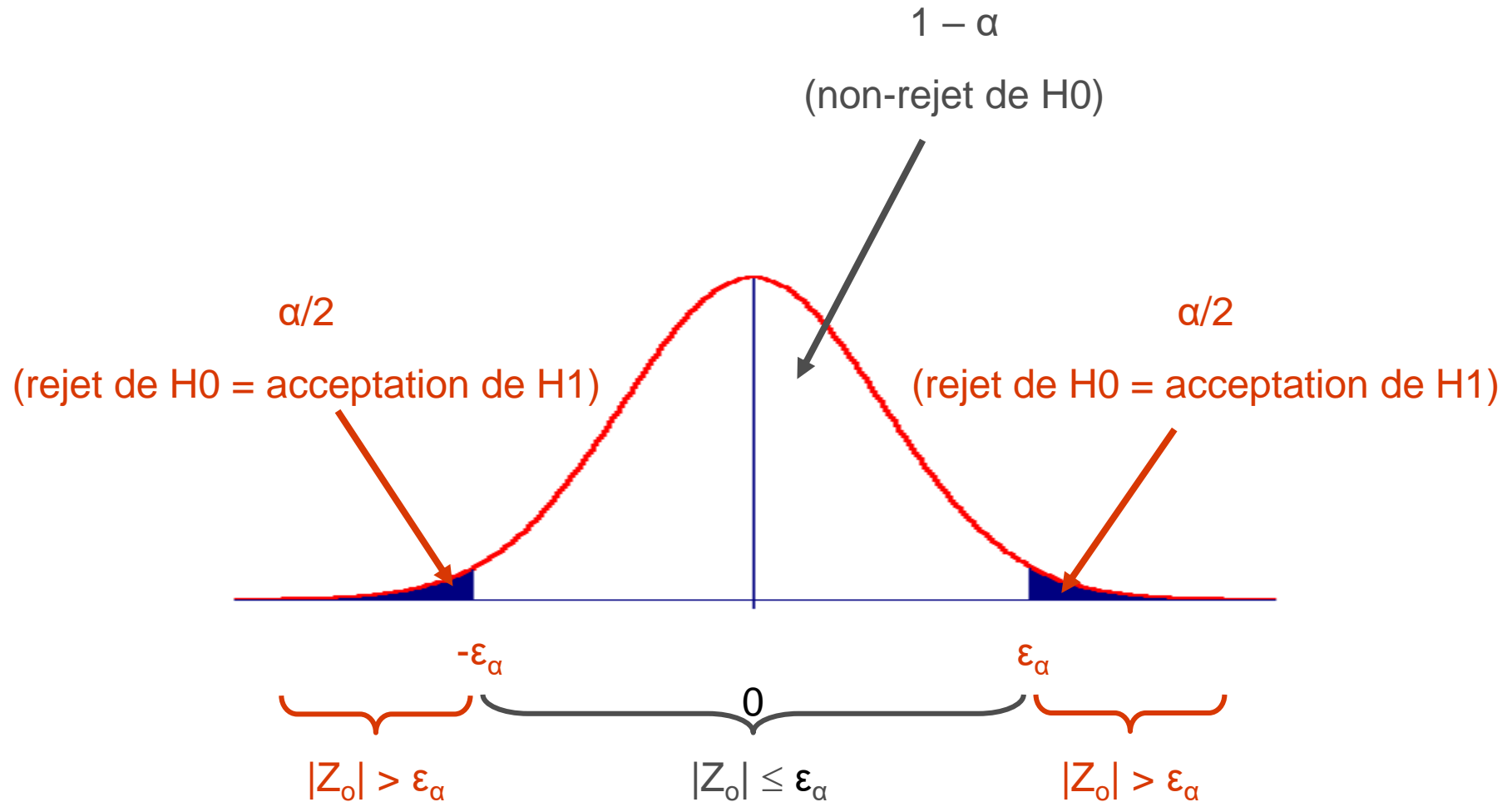
Sous H_0 : $\mu = \mu_{H0}$

$$Z = \frac{m - \mu_{H0}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$Z = \frac{m - \mu_{H0}}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0, 1)$$

La valeur de l'écart-type σ étant le plus souvent inconnue, on lui substitue son estimation s à partir de l'échantillon

Densité de probabilité de loi normale centrée réduite (0,1)



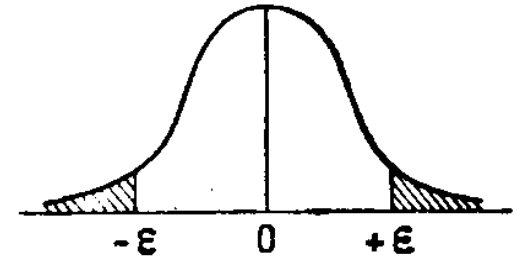
Abscisse : valeurs possibles de Z sous H_0

$$Z = \frac{\bar{m} - \mu_{H0}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Détermination de la valeur de ε_α correspondant à un risque $\alpha = 0,05$

Table de l'écart réduit

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit dépasse en valeur absolue une valeur donnée ε , c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge

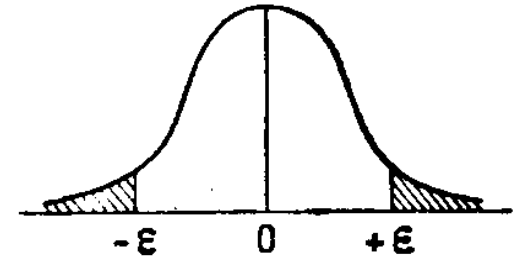


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

Détermination du degré de signification associé à Z_0 (P -value)

Table de l'écart réduit

La table donne la probabilité α pour que l'écart-réduit dépasse en valeur absolue une valeur donnée ε , c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

Exemple : $Z_0 = 1.37 \rightarrow P\text{-value} = 0.17$

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l'écart réduit
- Test t de Student

Test t de Student



$$m \approx \mu$$

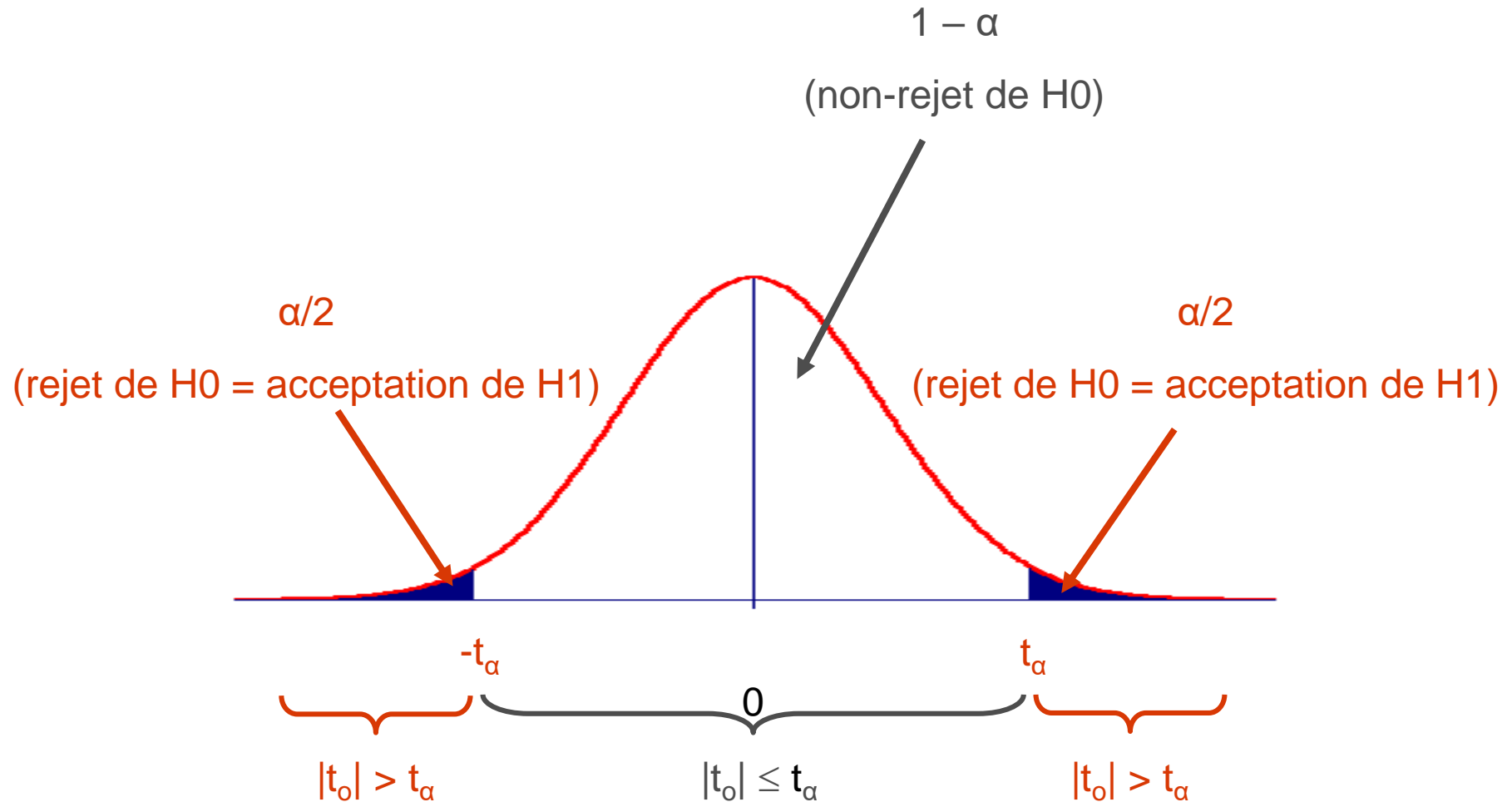
(fluctuations d'échantillonnage)

Sous H_0 : $\mu = \mu_{H0}$

Si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ alors $(m - \mu) / \sigma / \sqrt{n} \rightarrow t_{n-1}$

Rappel : La moyenne m d'une variable quantitative X calculée sur un échantillon d'effectif n est elle-même une variable aléatoire de loi de Student $t_{n-1}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ si la variable X suit elle-même une loi normale (quel que soit l'effectif n de l'échantillon) (Chapitre 11, Théorème central limite)

Densité de probabilité de la loi t de Student à (n-1) ddl

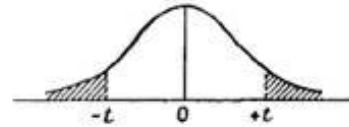


Abscisse : valeurs possibles de t sous H_0

$$t = \frac{\bar{m} - \mu_{H_0}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Table de t (*).

La table donne la probabilité α pour que t égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée, en fonction du nombre de degrés de liberté (d.d.l.).



Valeur de t_α pour :

α d.d.l.	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

$(n-1) \text{ ddl} = 5 : 2,57$

$(n-1) \text{ ddl} = 10 : 2,22$

$(n-1) \text{ ddl} > 30 : 1,96$

Messages clés

m	μ	effectif	test	conditions
estimée	théorique	$n \geq 30$	Z	-
		n	$t_{(n-1) \text{ ddl}}$	normalité

Mentions légales

L'ensemble de ce document relève des législations française et internationale sur le droit d'auteur et la propriété intellectuelle. Tous les droits de reproduction de tout ou partie sont réservés pour les textes ainsi que pour l'ensemble des documents iconographiques, photographiques, vidéos et sonores.

Ce document est interdit à la vente ou à la location. Sa diffusion, duplication, mise à disposition du public (sous quelque forme ou support que ce soit), mise en réseau, partielles ou totales, sont strictement réservées à l'Université Grenoble Alpes (UGA).

L'utilisation de ce document est strictement réservée à l'usage privé des étudiants inscrits à l'Université Grenoble Alpes (UGA), et non destinée à une utilisation collective, gratuite ou payante.