Biostatistiques – BST1

Chapitre 18

Test paramétrique de comparaison de deux moyennes estimées sur deux échantillons appariés

José LABARERE, PU-PH

Arnaud Seigneurin, MCU-PH, Bastien Boussat, MCU-PH, Alexandre Bellier, AHU, Patrice François, PU-PH

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l’écart réduit
- Test t de Student

Objectifs

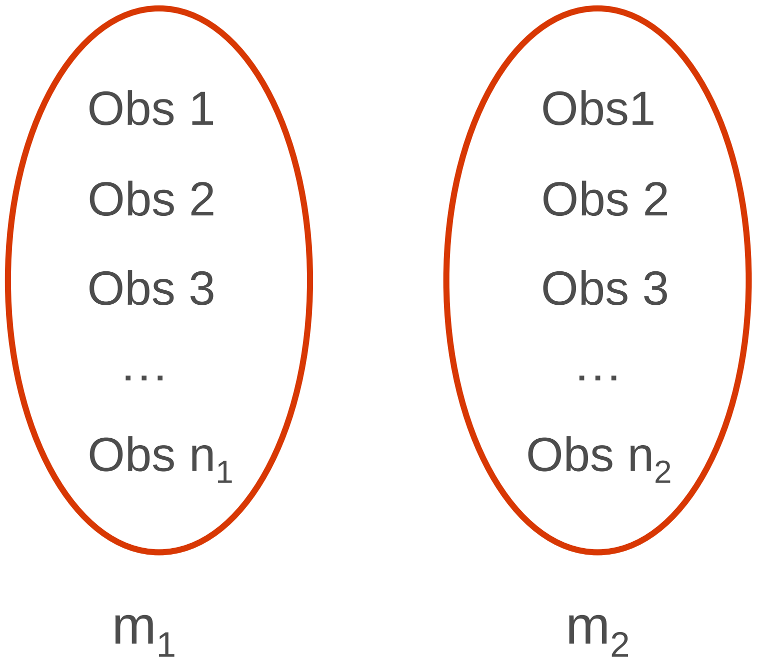
Comparaison de deux moyennes estimées sur deux échantillons appariés :

- Identifier une situation requérant ce type de test
- Sélectionner le test pertinent
- Connaitre et vérifier les contions d’application de ce test

Plan

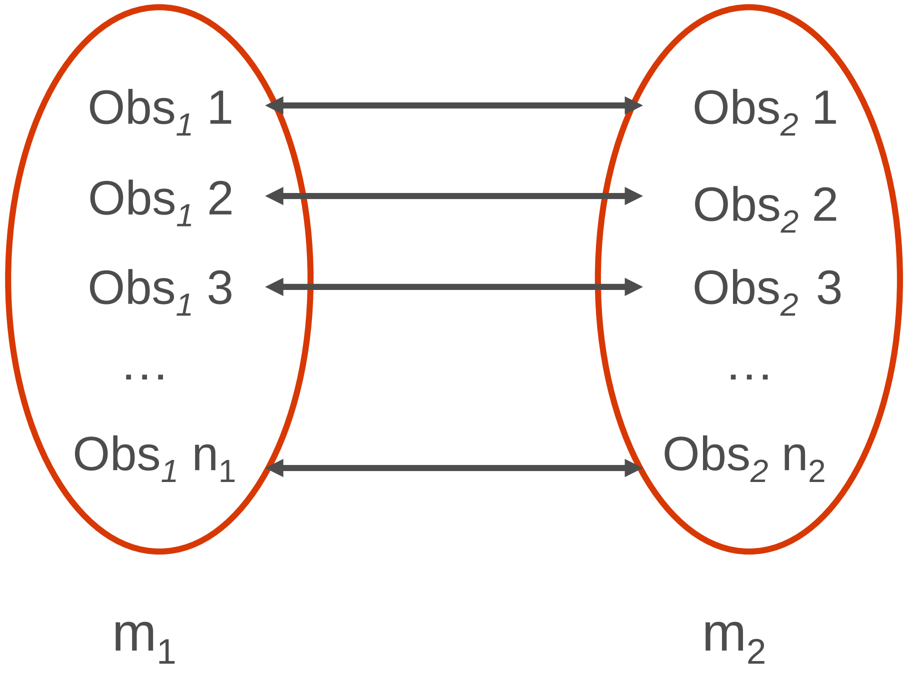
- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l’écart réduit
- Test t de Student

Comparaison de 2 moyennes estimées



échantillons indépendants

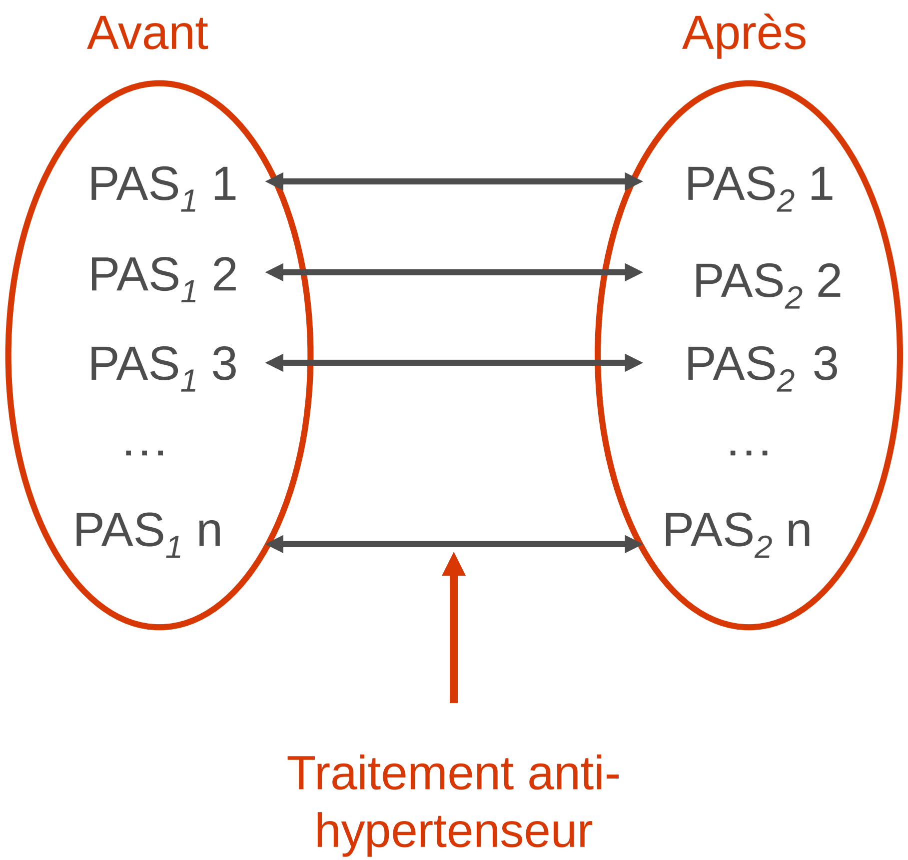
$(n_1 = n_2$ ou $n_1 \neq n_2)$



échantillons appariés

sujet pris comme son propre témoin
2 membres d'une fratrie…
$(n_1 = n_2 = n)$

Comparaison de 2 moyennes estimées à partir de 2 échantillons appariés



$H0 : m_{PASavant} = m_{PASaprès}$

Les mesures PAS_1 et PAS_2 du sujet 1 ne sont pas indépendantes

Les 2 mesures ont été effectuées sur le même sujet : si PAS_1 était très élevée, il est probable que PAS_2 restera élevée (mais moins que PAS_1 si le traitement est efficace)

Le test doit prendre en compte cette dépendance des observations PAS_1 et PAS_2

(En revanche, les mesures PAS_2 du sujet 1 et PAS_2 du sujet 2 sont indépendantes)

• Z pour échantillons indépendants

$m_1 - m_2$

$var(m_1 - m_2) = var(m_1) + var(m_2) - 2\ cov(m_1, m_2) = var(m_1) + var(m_2)$

$$Z = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{var(m_1) + var(m_2)}}$$

• Z pour échantillons appariés

$m_1 - m_2$

$var(m_1 - m_2) = var(m_1) + var(m_2)$ – **2 cov (m_1, m_2)**

$$Z = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{var(m_1) + var(m_2) - 2\,cov(m_1, m_2)}}$$

$Z_{\text{apparié}} > Z_{\text{indépendant}} \rightarrow$ **gain de puissance statistique**

Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l’écart réduit
- Test t de Student

Test Z de comparaisons de 2 moyennes estimées pour échantillons appariés

$$Z = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\mathrm{var}(m_1) + \mathrm{var}(m_2) - 2\,\mathrm{cov}(m_1, m_2)}}$$

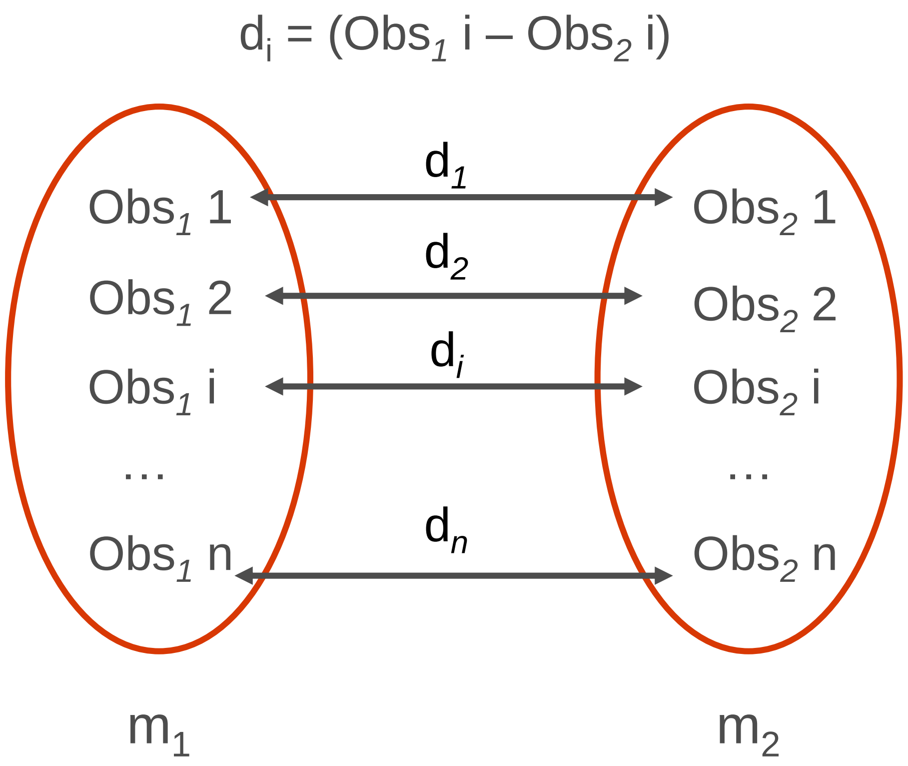
$$\frac{S_1^2}{n_1} \qquad \frac{S_2^2}{n_2}$$

ne peut pas être estimée directement car on ne dispose que d'une mesure de m_1 et une mesure de m_2

→ Il faut estimer var(m_1 - m_2) d'une autre façon

Test Z de comparaisons de 2 moyennes estimées pour échantillons appariés

L'unité d'analyse devient la différence d_i entre l'observation 1 et l'observation 2 pour chaque sujet



$$m_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - m_d)^2}{(n-1)}$$

Test Z de comparaisons de 2 moyennes estimées pour échantillons appariés

$$Z = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\operatorname{var}(m_1) + \operatorname{var}(m_2) - 2\operatorname{cov}(m_1, m_2)}} = \frac{m_d}{\sqrt{\operatorname{var}(m_d)}}$$

$(m_1 - m_2) = m_d$, avec $$m_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$\operatorname{var}(m_d) = s_d^2 / n$, avec $$s_d^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (d_i - m_d)^2}{(n-1)}$$

Rappel : La moyenne m d'une variable quantitative X calculée sur un échantillon d'effectif n est elle-même une variable aléatoire de loi normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, quelle que soit la loi de distribution de la variable X si l'effectif de l'échantillon n ≥30 (Chapitre 11, Théorème central limite)

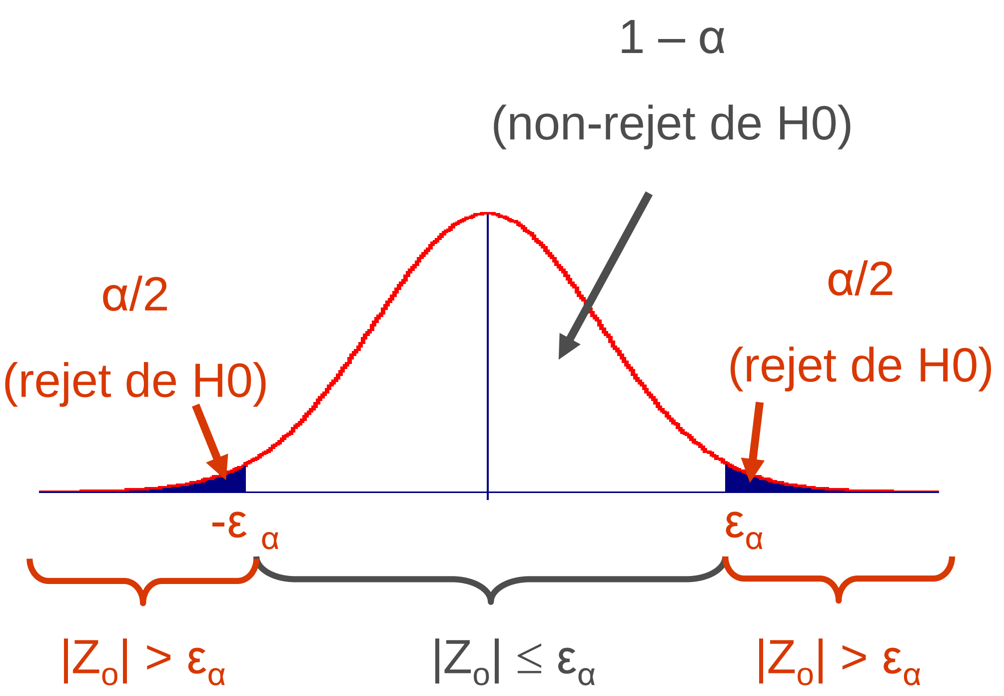
Test Z de comparaisons de 2 moyennes estimées pour échantillons appariés

H0 : $\mu_d = 0$ ($\mu_1 = \mu_2$)

H1 : $\mu_d \neq 0$ ($\mu_1 \neq \mu_2$)

Si $n \geq 30$ paires

$$Z = \frac{m_d}{\sqrt{\dfrac{s_d^2}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$



Plan

- Objectifs
- Introduction
- Test Z de l’écart réduit
- Test t de Student

Test t de Student de comparaisons de 2 moyennes estimées pour échantillons appariés

H0 : $\mu_d = 0$ ($\mu_1 = \mu_2$)

H1 : $\mu_d \neq 0$ ($\mu_1 \neq \mu_2$)

Si la distribution des différences individuelles est normale :

$$t = \frac{m_d}{\sqrt{\frac{s_d^2}{n}}} \rightarrow t_{(n-1)ddl}$$

Messages clés

m_1	m_1	effectif	test	conditions
estimée	estimée	$n \geq 30$	Z	-
(échantillons appariés)		n	$t_{(n - 1)\ ddl}$	Normalité de d_i

Glossaire

- **Covariance :** variance conjointe de 2 variables X et Y

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{N}$$

Cas particulier : X = Y

$$\mathrm{cov}(X,X)=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu_X)(X_i-\mu_X)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu_X)^2}{N}=\mathrm{var}(X)$$

X et Y indépendantes

cas particulier Y constant quelle que soit la valeur de X

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu_X)(Y_i-\mu_Y)}{N}=0$$

0 car Y_i = constante $=\mu_Y$

Mentions légales